

Mathematisches Papierfalten: Flachfaltbarkeit im Unterricht

Nur selten kommen Lernende in den Genuss, eine mathematische Theorie selbstständig zu entdecken und zu entwickeln. Auf dem eingereichten Poster haben wir eine dreistündige Beschäftigung mit der Flachfaltbarkeit vorgeschlagen, einem Teilgebiet des mathematischen Papierfaltens, als eine wunderbare Hands-on-Aktivität für die gymnasiale Oberstufe u. Ä. vor, mit der auf natürliche und unterhaltsame Art Schülerinnen und Schüler über selbst erarbeitete Modelle und Vermutungen zu mathematischen Entdeckungen gelangen, die sie formalisieren und begründen.

»Und wann wird das jetzt flach?«

Zum Einstieg entfalten wir einige mitgebrachte Papierfaltungen und betrachten ihre Faltmuster (die Strecken bzw. Falze, an denen gefaltet wird). Es entsteht die Frage: Was ist am Faltmuster (vgl. Bild 2) eines flachen Kranichs (vgl. Bild 1) so besonders, dass wir es flachfalten können (das heißt so falten, dass das fertige Modell in ein Buch gelegt werden kann, ohne dass neue Falze entstehen), aber andere Objekte nicht? Da die Frage in dieser Form zu schwer erscheint, fragen wir nach einem Spezialfall: Ein Faltmuster, in dem sich alle Falze in einem einzigen Punkt treffen, (vgl. Bild 3). Diese Frage können Schülerinnen und Schüler gut bearbeiten. Durch das Falten verschiedener Beispiele stellen sie verschiedene Vermutungen auf, zum Beispiel dass kein Faltmuster mit einer ungeraden Anzahl an Falzen flachfaltbar ist.

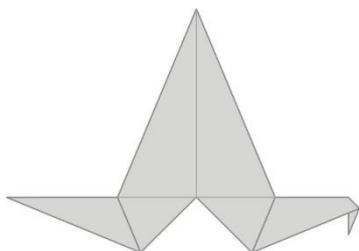


Bild 1: Vereinfachter Kranich

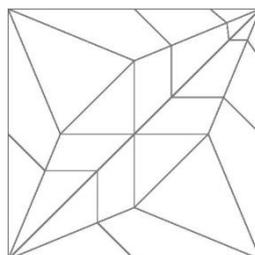


Bild 2: Faltmuster des Kranichs

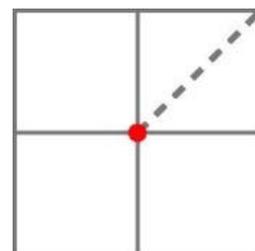


Bild 3: 3D-Ecke

Im weiteren Verlauf der Sequenz leiten wir die Schülerinnen und Schüler dabei an, ihre Vermutungen zu präzisieren und zu begründen. So finden sie etwa heraus, dass die Betrachtung der Anzahl der Falze nicht hinreichend ist, um die Flachfaltbarkeit zu gewährleisten. Daher untersuchen sie weitere Parameter des Faltmusters und entdecken in diesem Zusammenhang die wesentliche Beziehung zwischen den Winkeln des Faltmusters und seiner Flachfaltbarkeit: »Die Winkel müssen sich abwechseln, in der Summe Null sein«. Die Argumentation dazu verläuft wie im Bild 4 dargestellt.

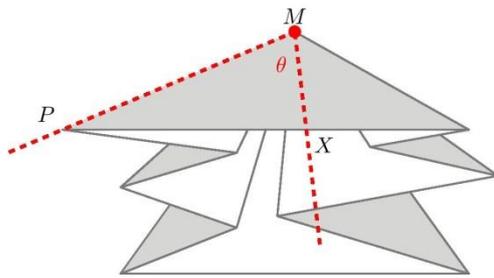


Bild 4: Läuft X auf dem Rand des Querschnitts, so beschreibt $\theta = \angle PMX$ die Auslenkung des Punktes X von P bzgl. M im Bogenmaß.

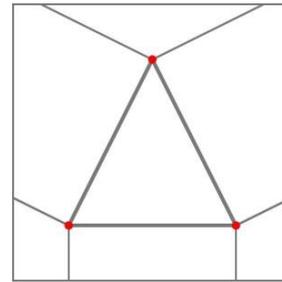


Bild 5: Das sog. Hull-Dreieck ist nicht flachfaltbar.

Damit schließen sie die Theorie der Flachfaltbarkeit der 1-Punkt-Faltmuster ab. Unter anderem am Faltmuster in Bild 5 erkennen Schülerinnen und Schüler, dass die allgemeine Theorie der Flachfaltbarkeit hingegen wesentlich komplizierter ist (tatsächlich ist die Entscheidung der Flachfaltbarkeit NP-vollständig), hiermit endet die Unterrichtssequenz.

Mathematische Inhalte und Kompetenzen

Bei dieser Beschäftigung werden verschiedene mathematische Inhalte angesprochen und verknüpft: Aus der raumanschaulichen Beschäftigung mit Papier entstehen mathematische Argumentationen. So reduziert sich beim Betrachten des Querschnitts im Bild 4 die Analyse der Flachfaltbarkeit auf die Untersuchung der alternierenden Summe bestimmter Winkel. Dabei werden verschiedene mathematische Kompetenzen angesprochen, primär aber das Argumentieren, das Kommunizieren und das Problemlösen.

Fazit

Unserer Ansicht nach ist die Flachfaltbarkeit eine attraktive Beschäftigung, um Mathematik mit Papierfalten auf einem anspruchsvollen Niveau zu verbinden. Das Ziel des Posters ist es, diese Aktivität populärer zu machen. Bisher haben wir durchweg positive Erfahrungen mit der Flachfaltbarkeit im Unterricht gemacht, dennoch fehlt eine fundierte empirische Untersuchung, um erhoffte Effekte auf die Leistung der Schülerinnen und Schüler zu messen.

Literatur

- Nedrenco, D., & Beck, J. (2016). *Flachfaltbarkeit: Mathematik mit eigenen Händen schaffen*. <https://opus.uni-wuerzburg.de/frontdoor/index/index/docId/13364>.
- Hull, T. (2013). *Project origami: activities for exploring mathematics*. CRC Press.