

## **Mathematisches Argumentieren und Beweisen - Struktur individuell-kognitiver und sozial-diskursiver Prozessmerkmale**

### **1. Hintergrund und Forschungsstand**

Erfolgreiches mathematisches Argumentieren und Beweisen spiegelt sich in der korrekten Formulierung und Absicherung mathematischer Vermutungen wieder (*Conjecturing*). Einen Beweis in kooperativer Zusammenarbeit zu finden, setzt neben individuell-kognitiven auch sozial-diskursive Prozesse voraus (Kollar et al., 2014). Inwiefern individuell-kognitive und sozial-diskursive Prozesse bei der Konstruktion mathematischer Beweise zusammenspielen, welche Prozessmerkmale Indikatoren für schlussendlich erfolgreiche Argumentations- und Beweisprozesse darstellen, und wie diese gemessen werden können, ist bislang unklar. In der Vergangenheit wurden bereits verschiedene Modelle (u.a. Boero, 1999) entwickelt, die die Vielzahl an explorativen und systematisierenden Teilprozessen und somit die Komplexität mathematischen Argumentierens und Beweisens aufzeigen. Dabei werden Prozesse wie das Generieren von Vermutungen anhand von Beispielen (u.a. Koedinger, 1998), das Formulieren einer Vermutung (u.a. Philipp, 2013), das Explorieren von Teilargumenten sowie das Zusammenführen einzelner Teilargumente zu einem (deduktiven) Beweis beschrieben. In sozialen Situationen kommen zusätzliche Anforderungen wie das Weiterführen und Bewerten von Argumenten des Gegenübers hinzu, die sich auf den kooperativen Austausch individueller Argumente im Sinne einer gemeinsamen Wissenskonstruktion beziehen (Kollar, Fischer & Slotta, 2007). Evidenz zur Rolle dieser Teilprozesse in Hinblick auf den Erfolg, findet sich derzeit in der Literatur nur vereinzelt.

### **2. Qualitätsindikatoren aus theoretischer Perspektive**

Aus theoretischer Sicht lassen sich diverse Prozessmerkmale identifizieren, die als lernförderlich und prädiktiv für den Erfolg mathematischen Argumentierens und Beweisens angenommen werden. Neben dem Generieren fachlich korrekter Ideen und dem Erkennen eigener Fehlwege, sind insbesondere experimentelle Tätigkeiten wie das Explorieren von Zusammenhängen, das Kombinieren von bereits vorhandenen Aussagen und Strukturen sowie das Erkunden von Eigenschaften und Grenzen verschiedener Hypothesen essentiell (u.a. Weber, 2009). Für den Erfolg kann auch die Qualität der argumentativen Kommunikation ausschlaggebend sein, die unter anderem die strukturelle Vollständigkeit von Argumentationen umfasst (u.a. Toulmin, 1958). Lernförderliche Kooperationsprozesse werden

durch das begründete Anführen von Gegenargumenten (Leitão, 2000) wie das Aufgreifen und Weiterentwickeln der Hypothesen und Argumente des Gegenübers charakterisiert (u.a. Chi, 2009). Ein weiterer zentraler Prozess ist zudem, dass kritische Hinterfragen von Aussagen im Rahmen eines wissenschaftlichen Diskurses (Mayweg-Paus, Thiebach & Jucks, 2016).

### **3. Arbeitsmodell**

Ausgangspunkt dieser Studie ist ein Arbeitsmodell, das die wesentlichen Merkmale hochwertiger kooperativer Argumentations- und Beweisprozesse systematisiert. Dabei differenzieren wir zwischen individuell-kognitiven und sozial-diskursiven Indikatoren. Unser Arbeitsmodell basiert auf der Annahme, dass sich diese Indikatoren durch Beobachtung von Argumentations- und Beweisprozessen von Studierenden während der Bearbeitung einer Conjecturing-Aufgabe messen lassen und somit auf ihre Interaktion sowie ihre Bedeutung für die Qualität des daraus resultierenden Produkts (des Beweises) untersucht werden können.

### **4. Ziele und Forschungsfragen**

Ziel der Studie war, ein Analyseinstrument zur Erfassung von Qualitätsindikatoren kooperativer mathematischer Argumentations- und Beweisprozesse zu entwickeln. Folgende Forschungsfragen sind im vorliegenden Beitrag zentral: (1) Welche individuell-kognitiven und sozial-diskursiven Qualitätsindikatoren lassen sich reliabel erfassen? (2) Bilden diese Qualitätsindikatoren ein ein-dimensionales Konstrukt oder beschreibt ein zweidimensionales Modell mit einer individuell-kognitiven und einer sozial-diskursiven Komponente die vorgefundenen Daten besser?

### **5. Methode**

Zur Untersuchung der Forschungsfragen wurden Argumentations- und Beweisprozesse in kooperativen Settings videographiert und analysiert.  $N=98$  Studienanfänger bearbeiteten in Dyaden zunächst gemeinsam eine Conjecturing-Aufgabe und wurden anschließend dazu aufgefordert, eine individuelle Lösung schriftlich festzuhalten. Ein hoch-inferentes Analyseinstrument wurde auf Grundlage unseres Arbeitsmodells entwickelt, um die Argumentations- und Beweisprozesse auf ihre *inhaltliche Korrektheit*, *kognitive Komplexität* sowie *strukturelle Vollständigkeit* hin zu bewerten. Das Analyseinstrument erfasst zudem die *Qualität explorativer Prozesse*. Neben diesen vier individuell-kognitiven Qualitätsindikatoren haben wir drei weitere Prozessmerkmale als Maß für das lernförderliche Potenzial kooperativer Argumentationsprozesse operationalisiert: *die Reaktion auf fachlich falsche Äußerungen des Lernpartners*, *die Intensität der Kooperation* sowie

das *Stellen inhaltlicher Fragen*. Alle Indikatoren wurden auf einer fünf-stufigen Ratingskala (1=höchste Qualität; 5=niedrigste Qualität) beurteilt. Die Kodierungen wurden jeweils dem Individuum zugewiesen, das die entsprechenden Argumente in den Diskurs eingebracht hat. Zudem fand ein erstes Rating über die erste Hälfte und ein zweites Rating über die zweite Hälfte der Bearbeitungszeit statt. Zur Beantwortung der zweiten Fragestellung wurde eine konfirmatorische Faktorenanalyse durchgeführt, wobei ein eindimensionales Modell gegen ein zweidimensionales Modell mit einer individuell-kognitiven und sozial-diskursiven Komponente verglichen wurde. Abhängigkeiten innerhalb der Dyaden wurden dabei berücksichtigt.

## 6. Ergebnisse

Über alle Indikatoren hinweg konnte eine gute Interrater-Reliabilität (ICCs zwischen 0.67-0.98) erzielt werden. Diese lässt auf eine objektive Messung der individuell-kognitiven sowie sozial-diskursiven Qualitätsindikatoren mathematischer Argumentations- und Beweisprozesse schließen. Die Ergebnisse weisen darauf hin, dass die Qualität der Argumentations- und Beweisprozesse über alle Indikatoren hinweg tendenziell während der Bearbeitungszeit abnimmt und die Indikatoren im Durchschnitt unter dem mittleren Qualitätsniveau liegen (s. Tabelle).

<i>Komponente</i>	<i>Erste Hälfte M(SD)</i>	<i>Zweite Hälfte M(SD)</i>
IK	2.78 (.68)	2.95 (.85)
SD	2.79 (.66)	3.03 (.86)

(IK= Individuell-Kognitiv, SD = Sozial-Diskursiv, 1=höchster Score, 5=niederster Score)

In Bezug auf die zweite Forschungsfrage zeigte sich, dass das zwei-dimensionale Modell mit einer individuell-kognitiven und sozial-diskursiven Komponente einem ein-dimensionalen Modell überlegen ist (*Fitindizes des zwei-dim. Modells:  $X^2 = 20.61$ ,  $df = 13$ ,  $p(X^2) = 0.081$ ,  $CFI = 0.95$ ,  $RMSEA = 0.077$ ). Da der Indikator *Reaktion auf fachlich falsche Äußerungen des Lernpartners* negativ und nicht signifikant auf dem sozial-diskursiven Faktor lädt, wurde eine post-hoc Analyse durchgeführt, indem dieser Indikator der individuell-kognitiven Komponente zugeordnet wurde. Das daraus resultierende Modell weist äußert gut Fitindizes auf ( $X^2 = 13.14$ ,  $df = 13$ ,  $p(X^2) = 0.437$ ,  $CFI = 1.0$ ,  $RMSEA = 0.011$ ).*

## 6. Diskussion und Ausblick

Für die Entwicklung des Analyseinstruments wurden zunächst theoriebasierte Qualitätsindikatoren kooperativer Argumentations- und Beweisprozesse systematisiert und operationalisiert. Auch wenn gewiss noch weitere

Indikatoren identifiziert werden könnten, liefert diese Systematisierung einen ersten Überblick über die in der Literatur diskutierten Qualitätsindikatoren, der in diesem Umfang bislang noch nicht vorzufinden war. Da sich gezeigt hat, dass sich diese Indikatoren reliabel erfassen lassen, kann in einem weiteren Schritt überprüft werden, inwiefern es sich bei den theoriebasierten Indikatoren tatsächlich um Qualitätsmerkmale handelt. Dazu sollen die Prozessdaten mit den individuellen, schriftlichen Lösungen abgeglichen werden. Des Weiteren hat sich gezeigt, dass kooperativen Argumentations- und Beweisprozessen eine mehrdimensionale Struktur zugrunde liegt und dass individuell-kognitive und sozial-diskursive Indikatoren bei der Konstruktion mathematischer Beweise weitgehend unabhängig voneinander sind. Diese Erkenntnis kann in Hinblick auf die Förderung mathematischen Argumentierens und Beweisens von zentraler Bedeutung sein.

## Literatur

- Boero, P. (1999). Argumentation and mathematical proof: A complex, productive, unavoidable relationship in mathematics and mathematics education. *International Newsletter on the Teaching and Learning of Mathematical Proof*, 7/8.
- Chi, M. T. (2009). Active-Constructive-Interactive: A Conceptual Framework for Differentiating Learning Activities. *Cognitive Science*, 1(1), 1-213.
- Koedinger, K. R. (1998). Conjecturing and Argumentation in High-School Geometry Students. In R. Lehrer (Hrsg.), *Studies in mathematical thinking and learning. De-signing learning environments for developing understanding of geometry and space* (S. 319–347). Mahwah, NJ: Erlbaum.
- Kollar, I., Fischer, F., & Slotta, J. D. (2007). Internal and external scripts in computer-supported collaborative learning. *Learning and Instruction*, 17, 708–721.
- Kollar, I., Ufer, S., Reichersdorfer, E., Vogel, F., Fischer, F. & Reiss, K. (2014). Effects of heuristic worked examples and collaboration scripts on the acquisition of mathematical argumentation skills of teacher students with different levels of prior knowledge. *Learning and Instruction*, 32, 22-36.
- Leitão, S. (2000). The Potential of Argument in Knowledge Building. *Human Development*, 43, 332-360.
- Mayweg-Paus, E., Thiebach, M., & Jucks, R. (2016). Let me critically question this! Insights from a training study on the role of questioning in argumentative discourse. *International Journal of Educational Research*, 79, 195-210.
- Philipp, K. (2012). *Experimentelles Denken. Theoretische und empirische Konkretisierung einer mathematischen Kompetenz*. Wiesbaden: Springer Fachmedien.
- Toulmin, S. (1958): *The Use of Argument*. Cambridge: Cambridge University Press.
- Weber, K. (2009). How syntactic reasoners can develop understanding, evaluate conjectures, and generate counterexamples in advanced mathematics. *The Journal of Mathematical Behavior*, 28 (2), 200-208.