Petra Carina TEBAARTZ, Justus-Liebig-Universität Gießen, DE

Einblicke in die Beweiskompetenz gewinnen - Aufgabenentwicklung

In meinem Dissertationsprojekt geht es darum, die Beweiskompetenz von Teilnehmerinnen und Teilnehmern der Mathematik-Olympiade zu erfassen, um daraus begründete Ansatzpunkte für eine frühzeitige und langfristige Förderung mathematisch interessierter junger Menschen zu gewinnen. Zu diesem Zweck wurde mir gestattet, im Rahmen der Regionalrunde der Mathematik-Olympiade in Nordrhein-Westfalen im Jahr 2016 für jede Jahrgangsstufe eine Aufgabe zum Beweisen zu stellen.[1] In diesem Artikel wird die Aufgabe zur Erfassung der Beweisfähigkeiten von Schülerinnen und Schülern in den Klassenstufen 7 und 8 vorgestellt. An ihr wird skizziert, welche grundlegenden Überlegungen bei der Entwicklung der Aufgabe leitend waren und inwiefern diese Aufgabe Einblicke in die Fähigkeiten und Schwierigkeiten von Lernenden zum mathematischen Beweisen ermöglicht.

Eine Aufgabe zum Erfassen der Beweisfähigkeiten

Um Aufgaben zum Erfassen der Beweisfähigkeiten von Wettbewerbsteilnehmenden zu entwickeln, wurde zuvor in einer Aufgabenanalyse untersucht, welche Anforderungen zum Beweisen bei der Mathematik-Olympiade bisher gestellt wurden. Hierzu wurde in Anlehnung an Bruder (1985) ein Modell objektiver Anforderungsstrukturen in Aufgaben mit Beweisnotwendigkeit erarbeitet. Auf dieser Grundlage wurde u.a. die in Abb. 1 dargestellte Aufgabe für Siebt- und Achtklässler entwickelt, pilotiert und optimiert.

Die vorliegende Aufgabe besteht aus vier Teilen a) bis d), in denen unterschiedliche Facetten mathematischen Beweisens fokussiert werden. So sind in den Teilen a) und b) Existenzaussagen, in den Teilen c) und d) Allaussagen zu zeigen. Zusätzlich unterscheiden sich die Aufgabenteile hinsichtlich des Gültigkeitsbereichs und der Abstraktheit der zu zeigenden Aussage, besonders hilfreicher Heurismen und der Komplexität der zu formulierenden Argumentkette. Diesbezüglich wurden gezielt Schwierigkeiten implementiert, um die Fähigkeiten von Lernenden hinsichtlich dieser für Beweisaufgaben charakteristischen Anforderungen zu erfassen und untersuchen zu können. Zugleich wurden dafür die Anforderungen in anderen Bereichen niedrig gehalten. Beispielsweise erfordern die Aufgaben ausschließlich einzelne elementare Wissenselemente wie die Begriffe *teilbar* und *ungerade*. Das hat zur Folge, dass Bearbeitungen kaum Aussagen über das vorhandene

[1] Ein herzlicher Dank gilt dem Landesverband Mathematikwettbewerbe NRW e.V., allen Ehrenamtlichen, die das Projekt unterstützt haben, und allen Teilnehmerinnen und Teilnehmern!

Bereichswissen der Lernenden zulassen, obwohl dieses je nach Aufgabenstellung Voraussetzung sine qua non für eigenständiges Beweisen mathematischer Aussagen ist (z.B. Reiss & Ufer 2009). Zudem bewegen sich alle gestellten Aufgaben im Bereich der Teilbarkeit ganzer Zahlen, aus Aufgabenbearbeitungen können nur bedingt Schlussfolgerungen auf Beweisfähigkeiten in anderen Themengebieten gezogen werden.

Aufgabendesign: Beispiel für Siebt- und Achtklässler

Ali, Björn, Claudia und Denise experimentieren mit natürlichen Zahlen einschließlich der Null.

a) Ali behauptet: „Es gibt eine **vierstellige** Zahl, die <u>beide</u> Bedingungen (1) und (2) erfüllt.

   (1) Wenn man die vier Ziffern der Zahl multipliziert, dann ist das Ergebnis 108.
   (2) Wenn man die vier Ziffern der Zahl addiert, dann ist das Ergebnis 18."

   Hilf Ali zu zeigen, dass seine Behauptung <u>richtig</u> ist.

   Hinweis: Vierstellige Zahlen (z.B. die Zahl 3027) bestehen aus vier Ziffern (z.B. hier aus der Tausenderziffer 3, Hunderterziffer 0, Zehnerziffer 2, Einerziffer 7). Bei einer vierstelligen Zahl ist die Tausenderziffer nie Null.

b) Björn interessiert sich für Quadratzahlen. Er behauptet: „Wenn man von einer **Quadratzahl** eins subtrahiert, dann erhält man immer eine ungerade Zahl." Aber Ali ist skeptisch. Hilf ihm zu zeigen, dass Björns Behauptung <u>falsch</u> ist.

   Hinweis: „Quadratzahl" heißt jede Zahl, die sich als Produkt zweier gleicher natürlicher Zahlen darstellen lässt. Zum Beispiel gilt $16 = 4 \cdot 4$. Also ist 16 eine Quadratzahl.

c) Claudia sagt: „2016 ist die <u>**kleinste**</u> **vierstellige** Zahl, die alle folgenden Bedingungen erfüllt:

   (1) Alle Ziffern sind verschieden.
   (2) Die Einerziffer ist dreimal so groß wie die Tausenderziffer.
   (3) Wenn man die Einer- und Tausenderziffer multipliziert, dann ist das Ergebnis durch 4 teilbar."

   Hilf Claudia zu begründen, warum ihre Behauptung <u>richtig</u> ist.

d) Denise berechnet die Summe von vier aufeinanderfolgenden ungeraden Zahlen (z.B. $5 + 7 + 9 + 11 = 32$). Sie behauptet: „Die Summe von **vier** <u>**aufeinanderfolgenden**</u> **ungeraden** Zahlen ist immer durch 8 teilbar." Hilf Denise zu beweisen, dass ihre Behauptung <u>richtig</u> ist.

Abb. 1: Aufgabe für Siebt- und Achtklässler

Im Folgenden werden die Anforderungen der Aufgabeteile im Detail analysiert. Dabei wird konkretisiert, welche Schwierigkeiten in den Aufgabenteilen gezielt implementiert oder aber vermieden wurden.

In **Aufgabenteil a)** ist eine korrekte Existenzaussage zu beweisen. Hauptschwierigkeit besteht hierbei zum einen im mathematischen Verständnis des

Quantors „Es gibt ein…“. Zum anderen ist die Aufgabe heuristisch anspruchsvoll, da trotz des endlichen Gültigkeitsbereichs (vierstellige Zahlen) das Finden eines passenden Beispiels durch unsystematisches Probieren kaum möglich ist. Hilfreich sind heuristische Strategien und Prinzipien wie kombiniertes Vorwärts- und Rückwärtsarbeiten, das Extremalprinzip und systematisches Probieren. Andere Hürden wurden hingegen vermieden. So wurde in Teil a), und auch in den anderen Aufgabenteilen, darauf geachtet, dass alle Lernenden unabhängig von außerunterrichtlicher mathematischer Beschäftigung die zu beweisende Aussage verstehen können. In der Aufgabenstellung kommen nur Fachbegriffe wie „multiplizieren“ und „Ziffer“ vor, die aus dem Schulunterricht bekannt sein sollten. Ausdrücke wie „Quadratzahl“, die sich in der Pilotierung häufig als schwierig erwiesen, wurden in einem Hinweis erläutert. Zusätzlich wurde versucht, mögliche lexikalisch-morphologische, syntaktische und textlinguistische Hürden zu vermeiden (Prediger 2013), und mittels optischer Markierungen inhaltlich wichtige Begriffe hervorgehoben. Weiterhin kommen in Einklang mit den Kernlehrplänen für Nordrhein-Westfalen (MSW 2007) symbolische Elemente weder in der Aufgabenstellung vor, noch sind sie für die Beweisfindung oder bei der Darstellung des Beweises notwendig. Über den Kernlehrplan hinausgehende Wissenselemente, wie Primfaktorzerlegung, können die erfolgreiche Bearbeitung erleichtern, sind aber nicht erforderlich.

Gleiches gilt auch für **Aufgabenteil b)**. Dieser fokussiert auf die Frage, ob und auf welche Art es Schülerinnen und Schülern gelingt, eine Allaussage zu widerlegen. Um auf das Prinzip des Gegenbeispiels zu fokussieren, wurden die Anforderungen in sämtlichen anderen Bereichen niedrig gehalten. Beispielsweise kann auch durch unsystematisches Probieren schnell ein Gegenbeispiel gefunden werden.

In den **Aufgabenteilen c) und d)** sind Allaussagen zu beweisen. Diese Anforderung geht insbesondere zu Beginn der Klassenstufe 7 noch über die curricularen Vorgaben hinaus (MSW 2007). Um dementsprechend ein differenziertes Bild zu erhalten, ist in Teil c) eine Allaussage vorgegeben, die mittels zahlengebundener Deduktionen bewiesen werden kann, während in Teil d) allgemeine Deduktionen bei unendlichem Gültigkeitsbereich erforderlich sind. Beide Aufgabenteile sind heuristisch anspruchsvoll. Zielführende Beweisideen beruhen in Teil c) auf dem Extremalprinzip oder einer vollständigen Fallunterscheidung, in Teil d) erscheinen die Anwendung des Invarianzprinzips oder eine Reformulierung in der Darstellung besonders hilfreich. Hinzu kommt das Formulieren der Argumentkette. Bei beiden Aussagen erfordert der Beweis mehrere Argumente, die korrekt zu verknüpfen sind. In Teil d) ist die Argumentkette geringer, in Teil c) mittlerer Komplexität.

Ausblick: Auswertung von Schülerbearbeitungen

Die vorgestellte Aufgabe wurde entwickelt, um herauszufinden, inwiefern es Teilnehmerinnen und Teilnehmern der Mathematik-Olympiade gelingt, mathematische Aussagen zu beweisen und zu widerlegen. Sie wurde in der Mathematik-Olympiade von 1221 Siebt- und Achtklässler bearbeitet.

In einer ersten Sichtung von bisher 300 Schülerdokumenten zeigt sich bereits, dass die Herangehensweisen und Fähigkeiten der Jugendlichen in den Klassenstufen 7/8 stark variieren, zugleich viele gute Voraussetzungen für eine Förderung mitbringen. In Abb. 2 sind exemplarisch zwei Bearbeitungen des Aufgabenteils b) dargestellt.[2] Die linke Bearbeitung deutet an, dass der Schüler mit dem Prinzip des Gegenbeispiels gut vertraut ist. Demgegenüber wurde in der rechts abgebildeten Bearbeitung die Aussage nicht widerlegt, das heißt die Anforderungen wurden formal nicht erfüllt. Jedoch ist dem Schüler etwas gelungen, das für mathematisches Arbeiten typisch ist: Der Gültigkeitsbereich der falschen Aussage wurde eingeschränkt und die Aussage für diesen Teilbereich unter Verwendung von Fachbegriffen als wahr begründet. Daran kann in einer Förderung angeknüpft werden.

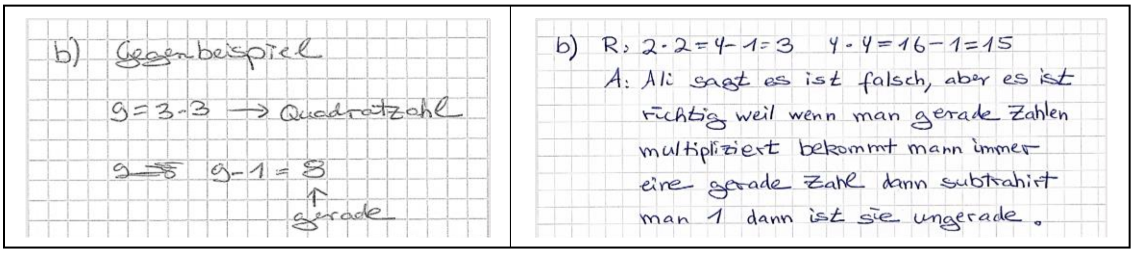

Abb. 2: Aufgabenteil b) – Bearbeitungen von zwei Wettbewerbsteilnehmern

Literatur

Bruder, R. (1985). Zur Bestimmung objektiver Anforderungsstrukturen von Begründungsaufgaben und Beweisaufgaben im Mathematikunterricht. *Wissenschaftliche Schriftenreihe der Pädagogischen Hochschule „Karl Liebknecht" Potsdam, 29* (1), 108-111.

Ministerium für Schule und Weiterbildung des Landes Nordrhein-Westfalen (Hrsg.) (2007). *Kernlehrplan für das Gymnasium – Sekundarstufe I (G8) in Nordrhein-Westfalen*. http://www.standardsicherung.schulministerium.nrw.de/lehrplaene/upload/lehrplaene_download/gymnasium_g8/gym8_mathematik.pdf [25.11.2016].

Prediger, S. (2013). Sprachmittel für mathematische Verstehensprozesse. In A. Pallack (Hrsg.), *Impulse für eine zeitgemäße Mathematiklehrer-Ausbildung. MNU-Dokumentation der 16. Fachleitertagung Mathematik* (S. 26–36). Neuss: Seeberger.

Reiss, K. & Ufer, S. (2009). Was macht mathematisches Arbeiten aus? Empirische Ergebnisse zum Lernen von Argumentationen, Begründungen und Beweisen. *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, 111*, 155-177.

[2] Die Bearbeitungen wurden aus Anonymitätsgründen transkribiert.