Lena WESSEL, Technische Universität Dortmund, DE

„Ja und dann kommt man halt immer um einen höher." Operatives Üben am Beispiel von Ableitungsregeln

Ausgangspunkt und Forschungsfragen

Die Unterrichtsphase des Übens hat in den letzten Jahren viel Aufmerksamkeit erhalten, wenn es darum geht Übungsaufgaben zu optimieren und das Üben für Lernende motivierender, sinnstiftender und kognitiv aktivierend zu gestalten. Ausgangspunkt für viele dieser praxisbezogenen Vorschläge sind Winters (1984) Prinzipien für eine „Theorie des Übens" (S. 5), konkret die vier Prinzipien des problemorientierten, operativen, produktiven und anwendungsorientierten Übens. Darüber hinaus prägt Winter mit seinen theoretischen Überlegungen vor dem Hintergrund einer konstruktivistischen Auffassung von Lernen die These, dass „entdeckend geübt und übend entdeckt wird" (ebd., S. 6f), ein Zusammenspiel, das insbesondere bei der Bearbeitung operativer Übungsaufgaben zu erreichen ist.

Während die genannten Prinzipien im Mathematikunterricht der Primar- und Sekundarstufe I bereits seit langem Berücksichtigung finden, bilanzieren Bruder et al. (2015) für die Aufgabenentwicklung zur Sicherung mathematischen Grundwissens und Grundkönnens, dass sich „Formen des automatisierenden, operativen, struktur- und anwendungsorientierten Übens (...) auch für die Oberstufe an(bieten)" (S. 117f). Hier besteht jedoch ein erhebliches Forschungs- und Entwicklungsdesiderat, denn es fehlen aktuell sowohl Vorschläge zur praktischen Umsetzung (Ausnahme Leuders 2015) als auch empirische Fundierungen u.a. bezüglich der Frage der Übertragbarkeit auf den Kontext der Oberstufe.

Konträr zu der Vielzahl an praktischen Unterrichtsvorschlägen liegen sowohl für die Primar- als auch Sekundarstufe bislang kaum empirische Untersuchungen des operativen oder produktiven Übens vor. Ausnahmen bilden für das Beschreiben von Zahlenmustern verschiedene im Primarstufenbereich angesiedelte Studien (z.B. Frobisher & Threlfall 1999, Link 2012). So stellen Frobisher & Threlfall (1999) u.a. fest, dass es Kindern leichter fällt, ein Muster weiterzuführen als dieses zu beschreiben. Diese Beobachtung wurde von Link (2012) für die Entwicklung und Erprobung von Materialien für den Grundschulmathematikunterricht aufgegriffen.

Aufgrund der beschriebenen Entwicklungs- und Forschungsbedarfe wird im hier dargestellten Projekt das Ziel verfolgt, exemplarisch für das Themenfeld Ableitungsregeln operative und reflexive Übungsformate zu entwickeln und empirisch mit Lernenden der Oberstufe zu erproben, um situative Potentiale, Wirkungen und Gelingensbedingungen zu dokumentieren.

Forschungsfragen und methodische Entscheidungen

Für die beschriebenen Desiderate auf Entwicklungs- und Forschungsebene werden im Sinne fachdidaktischer Entwicklungsforschung (Prediger et al. 2012) durch das Projekt auf beiden Ebenen Forschungsfragen bearbeitet, wobei aus Platzgründen jeweils lediglich auf einen kleinen Ausschnitt eingegangen werden kann.

- *F1 - Entwicklungsebene:* Wie können Lerngelegenheiten im Sinne des operativen Übens für das Anwenden von Produkt- und Kettenregel gestaltet werden?
- *F2 - Forschungsebene:* Welches situative Potenzial zeigt das Design-Prinzip des operativen Übens zur Anregung mathematisch reichhaltiger Lern- und Übeprozesse?

Als methodischer Zugriff für Entwicklung und Erforschung wurden iterativ drei Zyklen von Design-Experimenten in Labor- und Klassensettings realisiert mit dem Ziel, lokale Theorien zum Lerngegenstand zu modifizieren sowie um ein besseres Verständnis der situativen Wirkungen der entwickelten Aufgabenfolgen zu erlangen. Die Design-Experimente wurden als Partner- und Klassenerprobungen in beiden Jahrgangsstufen der Qualifikationsphase einer Gesamtschule und eines Gymnasiums im Schuljahr 2015/16 im Ruhrgebiet durchgeführt (insg. 44 Lernende, 538 Min. Videomaterial).

Einblick in Entwicklungs- und Forschungsprodukte: Operativ strukturierte Aufgabenfolgen und ausgewählte initiierte Prozesse

Auf Entwicklungsebene (Forschungsfrage F1) wurde als ein Entwicklungsprodukt das in Abb. 1 abgedruckte Aufgabenset von drei operativ strukturierten Aufgabenfolgen konzipiert.

Fülle die Tabellen aus. Was fällt dir auf?

- Notiere kurz deine Entdeckungen (z.B. Kennzeichnung mit Farben/Pfeilen, Verbalisierung).
- Begründe deine Entdeckungen.

Aufgabenfolge A

	A1: $f(x) = x \cdot e^x$	A2: $f(x) = (1+x) \cdot e^x$	A3: $f(x) = (2+x) \cdot e^x$
$f'(x)$			
$f''(x)$			
$f'''(x)$			

Das fällt mir auf:

Begründung:

Aufgabenfolge B

	B1: $f(x) = e^x$	B2: $f(x) = e^{x^2}$	B3: $f(x) = e^{x^3}$
$f'(x)$			
$f''(x)$			
$f'''(x)$			

Aufgabenfolge C

	C1: $f(x) = e^{-x}$	C2: $f(x) = x \cdot e^{-x}$	C3: $f(x) = x^2 \cdot e^{-x}$
$f'(x)$			
$f''(x)$			
$f'''(x)$			

Abb. 1. Operativ strukturierte Aufgabenfolgen zur Produkt- und Kettenregel

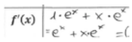
Diese beziehen sich mit zunehmender Schwierigkeit zunächst auf das Anwenden der Produktregel und im Weiteren auf die Ketten- bzw. Produkt- und Kettenregel für multiplikativ verknüpfte bzw. verkettete Funktionen mit e-

Funktion, linearen und quadratischen Funktionen. Die zugehörigen Arbeitsaufträge sind jeweils identisch, auch wenn zur Aufgabenfolge B und C in Abb. 1 nur ein Ausschnitt abgedruckt ist.

Die ausgewählten initiierten Prozesse (Forschungsfrage F2) beziehen sich im Weiteren auf die Bearbeitung von Aufgabenfolge A. Die empirischen Einblicke verdeutlichen die implementierten operativen Zusammenhänge, die die Aufgabenfolge als exemplarische Umsetzung des operativen Prinzips charakterisieren und leisten somit ebenfalls einen Beitrag zur Beantwortung von Forschungsfrage F1.

Maren und Carina, Schülerinnen im Jahrgang der Q1 eines Leistungskurses einer Gesamtschule, wurden bzgl. ihrer mathematischen Kompetenzen von der Lehrerin im mittleren Leistungsniveau eingestuft. In ihrem Bearbeitungsprozess von Aufgabenfolge A wurden drei Stufen rekonstruiert, die im Folgenden expliziert werden.

Stufe 1: Probieren und Aufgaben lösen durch Anwenden der Produktregel. Nachdem Maren und Carina zunächst alleine an Aufgabenfolge A gearbeitet haben, vergleichen sie nach ca. 10 Minuten ihre bis dahin notierten Ergebnisse, wobei Carina in Zeile 58 ihre richtige Anwendung der Produktregel erklärt. Dabei nimmt sie die additive Struktur der Produktregel besonders in den Blick.

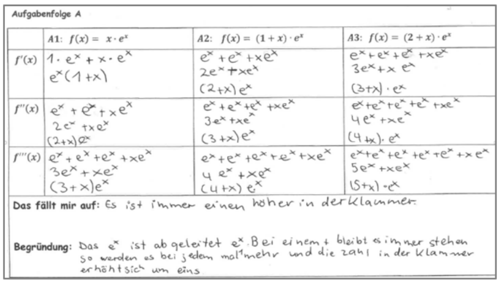
56	C	Also ich habe erstmal das *(zeigt mit Stift auf*  *)* daraus gemacht. (...)
58	C	(...) und hier *(zeigt mit Stift auf $x * e^x$.)* ist ja quasi die Produktregel. Hier ist ja das $x * e^x$ und x abgeleitet ist 1. Also $1 * e^x$, weil das zweite bleibt stehen. Und dann musst du ja noch ein Plus setzen, weil du das ja nochmal machen musst mit dem anderen abgeleitet. Deswegen nimmst du das Plus und halt, x brauchst du ja nicht ableiten, deswegen nimmst du x und e^x abgeleitet ist ja e^x. Das heißt du setzt´ Also ich würde das Plus jetzt dahinter setzen, einfach weil da ja noch was hinter muss.
59	M	Ah, okay. Und dann hat man also $2 * e^x$ und dann einmal $x * e^x$. Das würde passen! Dankeschön, Dankeschön.

Stufe 2: Muster als Lösung sehen, verstehen und beschreiben.

Bei Maren löst Carinas Erklärung einen entscheidenden Erkenntnisgewinn aus (Z. 59) und sie vermutet kurz darauf „Ja genau und dann muss man das noch in die Klammern setzen und dann bekommt man immer einen mehr da raus. Oder?“ (Z. 65).

Maren bezieht sich damit auf das besondere mathematische Muster, das in Aufgabenfolge A zu entdecken ist (siehe auch Abb. 2). Denn mit der Funktion $f(x) = x \cdot e^x$ wurde eine Funktion gewählt, die Verallgemeinerungs- (bei jeder Ableitung kommt ein e^x hinzu) und Begründungsprozesse für diesen Zusammenhang initiieren kann.

Stufe 3: Aha-Erlebnis und entdecktes Muster verifizieren und begründen.



Aufgabenfolge A

	A1: $f(x) = x \cdot e^x$	A2: $f(x) = (1+x) \cdot e^x$	A3: $f(x) = (2+x) \cdot e^x$
$f'(x)$	$1 \cdot e^x + x \cdot e^x$ $e^x(1+x)$	$e^x + e^x + xe^x$ $2e^x + xe^x$ $(2+x)e^x$	$e^x + e^x + e^x + xe^x$ $3e^x + x\,e^x$ $(3+x) \cdot e^x$
$f''(x)$	$e^x + e^x + xe^x$ $2e^x + xe^x$ $(2+x)e^x$	$e^x + e^x + e^x + xe^x$ $3e^x + xe^x$ $(3+x)e^x$	$e^x + e^x + e^x + e^x + xe^x$ $4e^x + xe^x$ $(4+x) \cdot e^x$
$f'''(x)$	$e^x + e^x + e^x + xe^x$ $3e^x + xe^x$ $(3+x)e^x$	$e^x + e^x + e^x + e^x + xe^x$ $4e^x + xe^x$ $(4+x)e^x$	$e^x + e^x + e^x + e^x + e^x + xe^x$ $5e^x + xe^x$ $(5+x) \cdot e^x$

Das fällt mir auf: Es ist immer einen höher in der Klammer

Begründung: Das e^x ist abgeleitet e^x. Bei einem + bleibt es immer stehen so werden es bei jedem mal 1 mehr und die zahl in der Klammer erhöht sich um eins

Abb. 2. Marens Bearbeitung zur Aufgabenfolge A

Als letzten Schritt im Prozess beschreibt und begründet Maren (siehe Abb. 2) das vertikal in einer Spalte entdeckte Muster „immer einen höher in der Klammer“. Beide Lernenden entdecken im Prozess zwar auch den horizontalen operativen Zusammenhang *f’ in A1 entspricht f in A2* fest, halten diesen aber nicht schriftlich fest.

Fazit

Der empirische Einblick deutet an, wie sich Lernende intensiv in einem Lern- und Übeprozess mit den operativ strukturierten mathematischen Mustern und Zusammenhängen auseinandersetzen und dabei Aha-Momente erleben. Gleichzeitig trainieren und vertiefen sie ihr prozedurales Wissen zum Anwenden der Produktregel. Damit zeigt dieser Prozess exemplarisch das situative Potential der operativ strukturierten Lerngelegenheiten auf, um das Zusammenspiel vom entdeckenden Üben und übenden Entdecken (vgl. Winter 1984) für mathematisch reichhaltige Lern- und Übeprozesse fruchtbar zu machen.

Literatur

Bruder, R., Feldt-Caeser, N., Pallack, A., Pinkernell, G. & Wynands, A. (2015). Mathematisches Grundwissen und Grundkönnen in der Oberstufe. In W. Blum, S. Vogel, Ch. Drüke-Noe & A. Roppelt (Hrsg.), *Bildungsstandards aktuell: Mathematik in der Sekundarstufe II* (S. 108–124). Braunschweig: Schroedel.

Frobisher, L. & Threlfall, J. (1999). Teaching and Assessing Patterns in Number in the Primary Years. In A. Orton (Hrsg.), *Pattern in the Teaching and Learning of Mathematics* (S. 84–103). London: Cassell.

Leuders, T. (2015). Intelligentes Üben im Mathematikunterricht. In W. Blum, S. Vogel, Ch. Drüke-Noe & A. Roppelt (Hrsg.), *Bildungsstandards aktuell: Mathematik in der Sekundarstufe II* (S. 192–204). Braunschweig: Schroedel.

Link, M. (2012). *Grundschulkinder beschreiben operative Zahlenmuster: Entwurf, Erprobung und Überarbeitung von Unterrichtsaktivitäten als ein Beispiel für Entwicklungsforschung.* Wiesbaden: Vieweg und Teubner.

Prediger, S., Link, M., Hinz, R., Hußmann, S., Thiele, J. & Ralle, B. (2012). Lehr-Lernprozesse initiieren und erforschen – Fachdidaktische Entwicklungsforschung im Dortmunder Modell. *Der mathematische und naturwissenschaftliche Unterricht, 65(8),* 452–457.

Winter, H. (1984). Begriff und Bedeutung des Übens im Mathematikunterricht. *Mathematik lehren,* 2, 4-16.