Benedikt WEYGANDT, Freie Universität Berlin, DE

Mathematik entdecken lernen am Übergang Schule-Hochschule: Ein Plädoyer für eine Hochschul-Stoffdidaktik Mathematik

Motivation

„Bei lehrbuchartigem, dozierendem Unterricht wird in aller Regel nicht lange gefackelt: Man gibt eine explizite Definition, erläutert sie durch Beispiele und Gegenbeispiele, verkündet, daß [der Begriff] aus diesem und jenem Grunde wichtig oder interessant ist und geht dann rasch zu Sätzen und ihren Beweisen über. Diese ökonomische Vorgehensweise ermöglicht nach aller Erfahrung nur einer Minderheit hochmotivierter und überdurchschnittlich geübter Schüler/Studenten ein effektives Lernen. In allgemeinbildenden Schulen müssen wir uns jedenfalls um einen Zugang bemühen, der sowohl maximale Eigeninitiative begünstigt als auch die Bedeutungshaltigkeit des zu erwerbenden Begriffs von vornherein erkennen läßt." (Winter 1983, S. 177)

Die von Heinrich Winter geforderte Begünstigung studentischer Eigeninitiative gilt es nicht nur an allgemeinbildenden Schulen zu ermöglichen, sondern zu Studienbeginn im Allgemeinen und Lehramtsstudierenden im Speziellen. Da außerhalb der Schule nur wenige mathematische Vorbilder existieren, kommt der Botschafterrolle der Lehrkräfte für das gesellschaftliche Bild der Mathematik eine besondere Bedeutung zu. Ziel muss daher sein, zukünftigen Lehrkräften die Möglichkeit zu geben, auch bei begrenztem fachwissenschaftlichen Anteil im Studium das „Getriebe" der Mathematik kennenzulernen (vgl. Toeplitz 1928, S. 6) und ein gültiges Bild des Faches zu erwerben.

In einem Modellprojekt der Goethe Universität Frankfurt a. M. wurde versucht, dem am Übergang von der Schule zur Hochschule häufig erlebten „abstraction shock" entgegenzuwirken. Dazu wurde im Rahmen der hochschuldidaktischen Neukonzeption des Studiengangs gymnasiales Lehramt die Vorlesung »Entstehungsprozesse von Mathematik« eingeführt. Hier erhielten die Studierenden die Möglichkeit, die für sie neue Hochschulmathematik eigentätig zu erkunden und die oft zitierten Bezüge zwischen dieser und der vertrauten Schulmathematik herzustellen.

Als zeitlicher Rahmen standen für dieses Projekt zwei Semesterwochenstunden zur Verfügung. Da sich ein eigentätig-entdeckender Zugang im Format einer klassischen Vorlesung nur bedingt gut umsetzen lässt, wurde die Vorlesung einstündig gestaltet, während die andere Hälfte der Zeit in Form einer einstündigen Präsenzübung mit einem Fokus auf studentischer Gruppenarbeit stattfand. Die Veranstaltung wurde im Studienverlaufsplan parallel zu Analysis I angeboten und vertiefte exemplarisch einige der dort vermittelten Inhalte. Sie lässt sich also als hochschuldidaktische Anreicherung der universitären Lehrkultur verstehen, welche zugleich die Struktur und Inhalte der üblichen Anfängervorlesung unangetastet lässt. Den Studierenden sollten Techniken an die Hand gegeben werden, das dort vermittelte Fachwissen mit Blick auf ihre mathematische Grundbildung nachhaltiger zu erlernen (vgl. Baumert 2000). Genuine mathematische Arbeitsweisen rückten als eigener Lerngegenstand in den Fokus und die Verbindung zwischen Schul- und Hochschulmathematik wurde auch anhand der geschichtlichen Entstehung mathematischer Begriffe hergestellt (vgl. Nickel 2013). Dabei bot sich eine genetische Herangehensweise an, denn „Begriffe müssen entdeckt, Definitionen nacherfunden werden" (Winter 1983, S. 181) – oder wie Pólya einst schrieb: „Gewiss, laßt uns beweisen lernen, laßt uns aber auch erraten lernen." (Pólya 1988, S. 10).

Die in der Veranstaltung umgesetzten Lehrformen orientierten sich u. a. an der Forderung Heinrich Winters zum Umgang mit Definitionen; dieser spricht von folgenden wichtigen Aktivitäten: „untersuchen, inwieweit die charakterisierenden Eigenschaften eindeutig sind; untersuchen, auf Unter- und Überbestimmtheit; untersuchen, ob zwei konkurrierende Formulierungen dasselbe sagen; weitere äquivalente Formulierungen finden; eine Definition abwandeln und die Auswirkungen davon beobachten, usw." (Winter 1983, S. 193–194).

Kriterien guter universitärer Lehre

Bei den vorgenommenen Veränderungen in der universitären Lehrkultur stellte sich schnell die Frage nach „guter" Lehre, und ebenso schnell rückten die Übungsaufgaben als Charakteristikum mathematischer Lehre ins Blickfeld. Auf der Suche nach Kriterien, welche Lehre als „gute" Lehre auszeichnen finden sich zunächst Antworten, was unter gutem Mathematikunterricht verstanden wird. So nennen beispielsweise Büchter und Leuders (2014, S. 13) folgende „fundamentale Prinzipien, die als Konsens des Verständnisses guter Lehre betrachtet werden"

- aktiv-entdeckend Lernen (Eigentätigkeit, genetisches Prinzip)
- ein stimmiges Bild von Mathematik erfahren (d. h. Prägen von beliefs)
- Mathematiklernen mit anderen (dialogisches Lernen, Begriffsbildung)

Diese Kriterien lassen sich direkt für die tertiäre Lehre übernehmen – eine Unterscheidung zwischen mathematischer Schul- und Hochschullehre erschiene hier eher künstlich. Betrachtet man die Übungsaufgaben als charakteristischen Grundbestandteil der mathematischen Ausbildung, so ist es naheliegend, die üblicherweise verwendeten Aufgabenformate unter die Lupe zu nehmen. Ähnlich wie sich viele Aufgaben des Schulfachs Mathematik öffnen lassen (vgl. Bücher und Leuders 2014), lassen sich auch die Aufgaben der Hochschulmathematik hinsichtlich ihrer Funktion (Lernen vs. Leisten) und hinsichtlich des Grades an Offenheit überarbeiten.

Aufgabenkonstruktion als Kern einer mathematischen Hochschul-Stoffdidaktik

Derzeit wird viel über Brückenschläge und Schnittstellen diskutiert (u. a. bei Ableitinger et al. 2013), doch sind diese in der Regel fachlicher Natur und sollen die Schul- und Hochschulmathematik verbinden. An dieser Stelle möchte ich für einen weiteren Brückenschlag werben, jenen zwischen der Fachwissenschaft Mathematik und ihrer (Hochschul-)Didaktik.

Und gerade der Diskurs über gute Übungsaufgaben sowie deren Formulierung könnten hier verbindend wirken. Bücher und Leuders (2014) bezeichnen die Erarbeitung guter Aufgaben als „eine zentrale Tätigkeit der Lehrenden“ und sprechen bei der Aufgabenkonstruktion von einem „Handwerk“ (Büchter und Leuders 2014, S. 14). Dies deckt sich meines Erachtens mit der Auffassung vieler Lehrender. Hier kann man also besagte Brücke ansetzen. Für „gute“ Mathematikaufgaben sind Fachmathematikerinnen und Fachmathematiker in der Regel zu gewinnen; häufig sind sie also bereits im Bereich der „Hochschul-Stoffdidaktik Mathematik“ tätig, ohne sich dessen bewusst zu sein. Die Frage, anhand welcher Kriterien sich „gute“ Mathematikaufgaben in der Hochschullehre identifizieren lassen, muss in Zukunft allerdings noch diskutiert werden. Dabei müssen die Erfahrungen der Fachmathematik ebenso berücksichtigt werden wie die Erkenntnisse aus der Didaktik der Hochschulmathematik, und die kommende Jahrestagung von GDM und DMV bietet hierzu sicherlich vielfältige Möglichkeiten.

Wünschenswert ist, bei dieser Gelegenheit die Bekanntheit der Hochschuldidaktik bei Lehrenden der Fachwissenschaft zu vergrößern und ihren Nutzen für die fachmathematische universitäre Lehre herauszustellen. Für einen fruchtbaren Austausch wichtig ist dabei die Form: Hochschul(stoff)didaktik muss als eine Unterstützung für Dozierende wahrgenommen werden, keinesfalls als Einmischung in die Lehre.

Literatur

Ableitinger, C., Hefendehl-Hebeker, L., Herrmann, A. (2013). Aufgaben zur Vernetzung von Schul- und Hochschulmathematik. In Allmendinger, H., Lengnink, K., Vohns, A. und Wickel, G. (Hrsg.). *Mathematik verständlich unterrichten. Perspektiven für Unterricht und Lehrerbildung*. Wiesbaden, s.l.: Springer Fachmedien Wiesbaden, S. 217–233.

Baumert, J. (Hrsg.) (2000). *Schülerleistungen im internationalen Vergleich. Eine neue Rahmenkonzeption für die Erfassung von Wissen und Fähigkeiten*. Deutsches PISA-Konsortium; OECD. Berlin: Max-Planck-Inst. für Bildungsforschung.

Büchter, A., Leuders, T. (2014). *Mathematikaufgaben selbst entwickeln. Lernen fördern – Leistung überprüfen.* 6. Aufl. Berlin: Cornelsen.

Nickel, G. (2013). Vom Nutzen und Nachteil der Mathematikgeschichte für das Lehramtsstudium. In Allmendinger, H., Lengnink, K., Vohns, A. und Wickel, G. (Hrsg.). *Mathematik verständlich unterrichten. Perspektiven für Unterricht und Lehrerbildung*. Wiesbaden, s.l.: Springer Fachmedien Wiesbaden, S. 253–266.

Pólya, G. (1988). *Mathematik und plausibles Schliessen. Band 1: Induktion und Analogie in der Mathematik.* 3. Auflage. 2 Bände. Basel: Birkhäuser Basel.

Toeplitz, O. (1928). Die Spannungen zwischen den Aufgaben und Zielen der Mathematik an der Hochschule und an der höheren Schule. In *Schriften des deutschen Ausschusses für den mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht 11 (10),* S. 1–16.

Winter, H. (1983). Über die Entfaltung begrifflichen Denkens im Mathematikunterricht. In *JMD 4 (3),* S. 175–204. DOI: 10.1007/BF03339230.