

## Typen der Zahlenmusterdeutung

Anknüpfend an den BzMU-Beitrag aus dem Jahre 2016 (vgl. Wißing 2016), in dem die Begriffe *Muster* und *Strukturen* präzisiert, das zugrunde liegende (Zahlen-)Musterverständnis und die rekonstruierten Zahlenmusterdeutungstypen vorgestellt wurden, soll in diesem Beitrag das Theoriekonzept der Zahlenmusterdeutungstypen ausdifferenziert werden. Ferner erfolgt eine beispielhafte Analyse einer Musterdeutungsszene des Schülers Marvin, der ein strukturiertes Päckchen deutet.

### Typen der Musterdeutung

Basierend auf den Daten des Forschungsprojekts *KidZ - Kinder deuten Zahlenmuster* (vgl. Wißing 2015) konnten drei Musterdeutungstypen (s. Tab. 1, Anmerkung: Die in 2016 vorgestellten *vier* Typen wurden aufgrund weitergehender Analysen angepasst) rekonstruiert werden, die sich innerhalb einer Spanne von konkret-dingbezogenen bis hin zu strukturorientiert-relationalen Deutungen (vgl. Söbbeke 2005) bewegen.

| Typ               |         | Charakteristika                                   |
|-------------------|---------|---------------------------------------------------|
| Ziffern-Anordnung |         | Sichtbares                                        |
| Zahl-Operation    | einfach | Beziehungen zwischen Sichtbarem                   |
|                   | komplex | Beziehungen zwischen Unsichtbarem                 |
| Zahl-Struktur     |         | Beziehungen von Beziehungen zwischen Unsichtbarem |

Tab. 1: Typen der Zahlenmusterdeutung

Auch wenn der Grad an Abstraktion bei diesen Typen, die teilweise aufeinander aufbauen, zunimmt, soll dies **nicht** implizieren, dass der Typ *Zahl-Struktur* als der *optimale* Deutungstyp anzusehen ist, der bei jedem arithmetisch-symbolischen Aufgabenformat *erreicht* werden sollte. Vielmehr ist nicht jeder Deutungstyp in jedem arithmetisch-symbolischen Aufgabenformat gleichermaßen zu erwarten und sinnvoll. So kann bei einem Aufgabenformat die Einnahme der Sichtweise *Zahl-Struktur* sinnvoll und effizient, bei einem anderen Aufgabenformat aber von geringerer Bedeutung sein. Ferner kann es sein, dass es Situationen gibt, in denen eine Schülerin oder ein Schüler zu Beginn Deutungen des Typs *Zahl-Struktur* und im späteren Verlauf Deutungen des Typs *Ziffern-Anordnung* vornimmt. Dies heißt dann nicht, dass die Deutungen an Qualität verlieren. Ganz im Gegenteil, denn die verschiedenen Deutungstypen können sich sinnvoll ergänzen (s. hierzu das folgende Beispiel von Marvin). Verbleiben die Deutungen einer Schülerin oder eines Schülers jedoch ausschließlich bei den Typen *Ziffern-Anordnung*

und/oder *Zahl-Operation einfach*, so sind diese Deutungen von anderer Qualität.

Auch obwohl die drei Musterdeutungstypen nicht als gleichrangig anzusehen sind, stellen sie keine strenge Stufenfolge dar, sodass bei Erreichen der dritten *Stufe* nur diese in Deutungsprozessen verwendet werden sollte.

Ziel sollte es sein, Schülerinnen und Schüler im Umgang mit Zahlenmusterdeutungsanforderungen dahingehend zu fördern und zu fordern, dass ihnen alle Musterdeutungstypen vertraut sind und inhaltlich angereichert werden, sodass ein flexibler, kreativer und sicherer Umgang mit ihnen möglich wird. Dies sollte ihnen ermöglichen, unterschiedliche und vor allem auch sinnvolle Nutzungen der einzelnen Typen vorzunehmen, sodass sie beispielsweise abwägen können, welcher Typ bei welchem Aufgabenformat zweckmäßig anzuwenden ist.

Dieser Entwicklungsprozess im Umgang mit Zahlenmustern kann und sollte aktiv-entdeckend und in sozialen Interaktionen stattfinden, da das umfassende Erkunden von Zahlenmustern, das aufgrund der Abstraktheit der Zahlen (vgl. Devlin 1997, S. 12) und der Abstraktheit des Unsichtbaren, eine besondere Anforderung für die Schülerinnen und Schüler darstellt (vgl. Devlin 1997, S. 12 und auch Miller 1986), nicht von einem isoliert stehenden Individuum geleistet werden kann (vgl. Söbbeke 2005, S. 29)

### Beispiel: Marvin deutet ein Strukturiertes Päckchen

In der folgenden Szene aus dem Projekt *KidZ* soll Marvin (4. Sj.) ein Strukturiertes Päckchen (s. Abb. 1) deuten. Bei diesem Päckchen verringern sich die jeweils ersten Summanden stets um *minus zehn*. Die zweiten Summanden vergrößern sich stets um *plus elf*. Gemäß diesen beiden zugrunde liegenden Gesetzmäßigkeiten lassen sich die beiden Summanden entsprechend fortsetzen. Setzt man die beiden genannten Beziehungen zueinander in Beziehung, so lässt sich über die Summen der einzelnen Aufgaben aussagen, dass diese von oben nach unten stets um *plus eins* größer werden.

|     |       |   |       |   |       |
|-----|-------|---|-------|---|-------|
| 0.  | 734   | + | 222   | = | _____ |
| 1.  | 724   | + | 233   | = | _____ |
| 2.  | 714   | + | 244   | = | _____ |
| 3.  | 704   | + | 255   | = | _____ |
| 4.  | _____ | + | _____ | = | _____ |
| 5.  | _____ | + | _____ | = | _____ |
| 6.  | _____ | + | _____ | = | _____ |
| 7.  | _____ | + | _____ | = | _____ |
| ... |       |   |       |   |       |
| 10. | _____ | + | _____ | = | _____ |
| ... |       |   |       |   |       |
| 50. | _____ | + | _____ | = | _____ |

Abb. 1: Strukturiertes Päckchen

Marvin beschreibt das Päckchen (s. Abb. 1) wie folgt:

**Also hier sieht man** (*zeigt mit dem Stift auf 222*) **das werden immer elf mehr** (*tippt mit dem Stift nacheinander auf 222, 233 und 244*).

**Also zweihundertzweinzwanzig, zweihundertdreindreißig, zweihundertviernvierzig. Und hier** (zeigt mit dem Stift auf 734) **werdens immer zehn weniger** (tippt mit dem Stift auf 734, 724, 714 und 704). **Also wird das Ergebnis** (zeigt mit dem Stift vage in Richtung Ergebnis-Spalte) **insgesamt immer ein mehr.**

Zu Beginn deutet Marvin die zweiten Summanden, indem er zunächst die unsichtbare Veränderung verbal angibt („immer elf mehr“). Diese Deutung leitet er mit den Worten „Also hier sieht man“ ein. Betrachtet man die Zahlen, so sieht man diese Veränderung um *plus elf* nicht unmittelbar. Vielmehr sieht man an der *Oberfläche* zunächst nur verschiedene Zahlen. Erst wenn diese zueinander in Beziehung gesetzt werden, kann die Veränderung der Zahlen ausdifferenziert werden. Marvin legitimiert seine Entdeckung im Folgenden, indem er die sichtbaren Zahlen vorliest und auf sie zeigt.

Bei den Zahlen des ersten Summanden gibt er an, dass diese „immer zehn weniger“ werden. Auch hierbei müssen die sichtbaren Zahlen zueinander in Beziehung gesetzt worden sein, um solch eine konkrete Aussage tätigen zu können. Marvin schlussfolgert schließlich „Also wird das Ergebnis insgesamt immer ein mehr“. An dieser Stelle hat Marvin die beiden unsichtbaren, aber bereits genannten Veränderungen zueinander in Beziehung gesetzt und eine Aussage über die Ergebnisse getroffen, die zu diesem Zeitpunkt noch völlig *unsichtbar* sind. Marvins Aussagen, die auf einer hohen kognitiven Ebene stattfinden, lassen sich demzufolge gleich zu Beginn dieser Szene dem Typ *Zahl-Struktur* zuordnen.

Im weiteren Verlauf des Interviews begründet Marvin seine Aussage über die Ergebnisentwicklung und seine Konklusion erneut und setzt schließlich die Summanden und Ergebnisse fort. Hierbei unterlaufen ihm Fehler (s. Abb. 2, 10. u. 50. Aufgabe). Er bemerkt diese und gibt auf der Suche nach den Fehlerquellen an, dass die Ergebnisse aufgrund der konstanten Veränderung um „+1“ richtig sein müssen und äußert sich zur 10. Aufgabe wie folgt:

|     |            |   |            |   |             |
|-----|------------|---|------------|---|-------------|
| 0.  | 734        | + | 222        | = | <u>656</u>  |
| 1.  | 724        | + | 233        | = | <u>657</u>  |
| 2.  | 714        | + | 244        | = | <u>658</u>  |
| 3.  | 704        | + | 255        | = | <u>659</u>  |
| 4.  | <u>694</u> | + | <u>266</u> | = | <u>960</u>  |
| 5.  | <u>684</u> | + | <u>277</u> | = | <u>961</u>  |
| 6.  | <u>674</u> | + | <u>288</u> | = | <u>962</u>  |
| 7.  | <u>664</u> | + | <u>299</u> | = | <u>963</u>  |
| ... |            |   |            |   |             |
| 10. | <u>634</u> | + | <u>333</u> | = | <u>966</u>  |
| ... |            |   |            |   |             |
| 50. | <u>594</u> | + | <u>312</u> | = | <u>1006</u> |

Abb. 2: Strukturiertes Päckchen

**Und** (tippt auf 634) **hier weiß man ja das die vier hinkommt** (zeigt auf den Einer von 634). **Weil hier** (tippt mit dem Stift die Spalte der Einer der ersten Summanden von A0 bis A7 entlang) **ist das ja immer so und dann kann das ja plötzlich nicht sein, dass da** (zeigt auf den Einer von 634) **eine drei ist. Also muss [...]** **hier** (zeigt auf den Einer der Zahl 333) **eine zwei hin.**

Marvin begründet die Richtigkeit der Zahl „634“, indem er auf das stetige Vorkommen der Ziffer „4“ in den Einern der ersten Summanden verweist. Aufgrund dieser Eigenschaft schließt er einen Fehler bei diesem Summanden aus und folgert, dass ein Fehler bei dem zweiten Summanden vorliegen muss. Marvin konzentriert sich in diesem Ausschnitt auf die visuelle Präsenz der *Ziffern*. Generell findet in dieser Szene ein Zusammenspiel der Deutungstypen *Ziffern-Anordnung* und *Zahl-Operation komplex* statt.

Dieses Beispiel zeigt, dass Marvin verschiedene Sichtweisen bei der Deutung eines Zahlenmusters flexibel einnehmen und anwenden kann, sodass er (mit ihrer Hilfe) Fehler entdeckt und Fehlerquellen begründet. Hierbei behält er den Gesamtzusammenhang des Zahlenmusters, also die Phänomene an der Oberfläche und die gesetzmäßig, strukturellen Zusammenhänge, welche sich in einem komplementären Wechselspiel gegenseitig bedingen, im Blick. Hier wird grundsätzlich sichtbar, wie eine vorerst vorgenommene Fokussierung auf einen primären Typ (*Ziffern-Anordnung* oder *Zahl-Operation*) recht schnell eine passende Deutung eines Zahlenmusters ermöglichen kann (z.B. durch Anordnungen auf der Ebene sichtbarer Phänomene) und dass zudem bei auftretenden Begrenzungen der primären Typen auch die zugehörige komplementäre Seite – nämlich die unterliegenden strukturellen, operativen Gesetzmäßigkeiten – als eine wesentliche Charakterisierung explizit einbezogen werden muss, um mathematische Muster umfassender deuten zu können.

## Literatur

- Devlin, K. (1997). *Muster der Mathematik: Ordnungsgesetze des Geistes und der Natur*. Aus dem Amerikanischen übersetzt von Diener, I. Heidelberg; Berlin: Spektrum, Akademischer Verlag.
- Miller, M. (1986). *Kollektive Lernprozesse. Studien zur Grundlegung einer soziologischen Lerntheorie*. Frankfurt: Suhrkamp
- Söbbeke, E. (2005). *Zur visuellen Strukturierungsfähigkeit von Grundschulkindern – Epistemologische Grundlagen und empirische Fallstudien zu kindlichen Strukturierungsprozessen mathematischer Anschauungsmittel*. Hildesheim: Franzbecker.
- Wißing, E.-M. (2015). Kinder deuten strukturierte arithmetisch-symbolische Zahlenmuster - Erste Einsichten aus einer qualitativen Studie. In: Calouri, F., Linneweber-Lammerskitten H. & Streit C. (Hrsg.): *Beiträge zum Mathematikunterricht 2015. Band 2*. Münster: WTM Verlag, S. 1000-1003.
- Wißing, E.-M. (2016). Kinder deuten Beziehungen zwischen Phänomenen und Strukturen in arithmetisch-symbolischen Zahlenmuster. In: Institut für Mathematik und Informatik Heidelberg (Hrsg.): *Beiträge zum Mathematikunterricht 2016. Band 2*. Münster: WTM-Verlag, S. 1069-1072.