

Einige Bemerkungen zum Satz von van Aubel

1. Motivation

Bekanntlich ist Elementargeometrie der Teil der Schulmathematik, mit dem die meisten Schüler und Schülerinnen Probleme haben. Die Gründe hierfür sind vielfältig: Einer davon ist, dass Algorithmisches Denken und Kalkül in der Elementargeometrie eine untergeordnete Rolle spielen. Vielmehr braucht man dafür „geschulte“ Augen, ein paar Geistesblitze und manchmal einfach Glück. Angenommen, geschulte Augen entstehen durch Üben, wonach man bestimmte Muster und Zusammenhänge leichter erkennt. Was ist mit den Geistesblitzen? Lassen sie sich trainieren? Falls ja, wie? Ziel der vorliegenden Arbeit ist es, anhand des Satzes von van Aubel einige Wege aufzuzeigen, wie man den Boden für mögliche Geistesblitze vorbereiten könnte.

2. Der Satz von van Aubel

Sei $ABCD$ ein Viereck, Q_1, Q_2, Q_3 und Q_4 seien auf die Seiten des Vierecks konstruierte Quadrate. Mit M_1, M_2, M_3 und M_4 bezeichne man ihre Mittelpunkte. Der Satz von van Aubel besagt, dass die Verbindungsstrecken der Mittelpunkte gegenüberliegender Quadrate (in diesem Fall M_1M_3 und M_2M_4) gleich lang und orthogonal zueinander sind. (Siehe *Abb. 1*)

Bemerkung: Der Satz gilt auch für konkave Vierecke. Auch können die Quadrate Q_1, Q_2, Q_3 und Q_4 auf den Viereckseiten nach innen konstruiert werden, der Satz gilt hierfür ebenfalls.

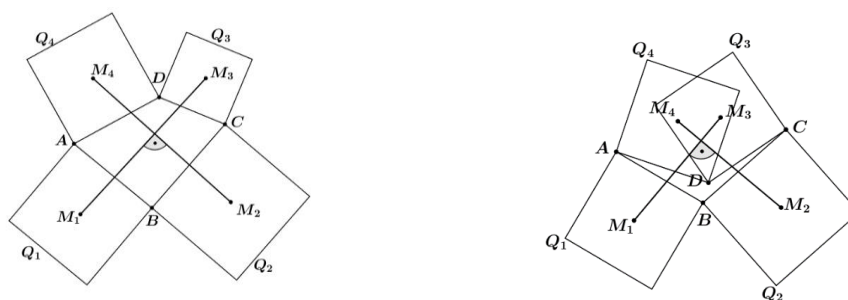


Abb. 1

Es gibt verschiedene Beweise zu diesem Satz. *Abb. 2* zeigt einen schönen Beweis, dessen Hauptidee auf dem Mittelpunkt O der Diagonalen AC beruht und auf der Tatsache, dass das Dreieck OM_4M_2 durch Drehung des Dreiecks

OM_3M_1 um 90° um den Punkt O entsteht. Siehe dazu z. B. Alsina (2013) oder Duican (1987).

Der Mittelpunkt O spielt bei diesem Beweis eine entscheidende Rolle. Auch wenn diese Lösung im Nachhinein so offensichtlich erscheint, kommen nur wenige Schüler und Schülerinnen auf die Idee, den Mittelpunkt einer der Diagonalen einzuzeichnen und bezüglich diesem das Ganze zu betrachten.

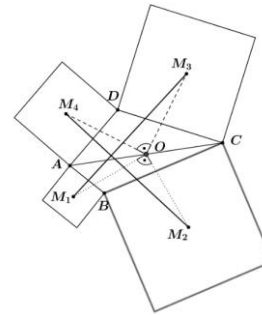


Abb. 2

Im Folgenden wird der Frage nachgegangen, wie man die Schüler und Schülerinnen auf eine solche (oder ähnliche) Idee bringen könnte.

Möchte man auf den Beweis aus der *Abb. 2* hinarbeiten, so bietet sich vorher eine Hilfsaufgabe an. Dabei geht es um die Mittelpunkte M_1 und M_2 zweier auf die Seiten eines Dreiecks (nach außen) konstruierter Quadrate und den Mittelpunkt O der dritten Dreiecksseite (*Abb. 3*). Es ist zu zeigen, dass $M_1O \perp M_2O$ und $|M_1O| = |M_2O|$.

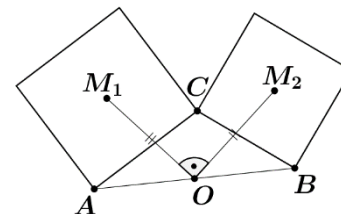


Abb. 3

Wendet man das Ergebnis dieser Aufgabe in *Abb. 2* auf die obere beziehungsweise untere Hälfte des Bildes an, so erkennt man schnell die Kongruenz und „Orthogonalität“ der Dreiecke OM_4M_2 und OM_3M_1 .

Der vorgestellte Beweis geht von dem (beliebig) vorgegebenen Viereck $ABCD$ und den dazugehörigen Quadratmittelpunkten M_1, M_2, M_3 und M_4 aus und betrachtet die Figur statisch. Das bedeutet, dass in dem festgelegten Bild nach möglichen Zusammenhängen gesucht wird. Doch auch beim Lösen von Geometrieaufgaben könnte ein Perspektivwechsel hilfreich sein: Man schaut nicht mehr starr auf das Bild, sondern fragt nach Prozessen, durch die das Bild entstanden sein könnte. Dabei richtet man seine Aufmerksamkeit auf kleine Unterschiede und Änderungen, aber gleichzeitig auch auf Konstanten zwischen den aufeinanderfolgenden Zuständen des Entstehungsprozesses. Ein solcher Wechsel der Sichtweise dient nicht nur dem Problemlösen, sondern fördert bei Schülern und Schülerinnen auch das sogenannte funktionale Denken. Mehr zum prädikativen und funktionalen Denken siehe Schwank (2003).

In Kapitel 3. und 4. wird jeweils eine Entstehung der *Abb. 1* vorgestellt. Die Untersuchung des konkaven Falls wird den verehrten Lesern und Leserinnen überlassen.

3. Wie entsteht ein Viereck?

Die erste Entdeckungsreise beginnt mit dem entarteten Viereck $ABCD$, wobei die Eckpunkte B und D auf der Diagonalen AC (oder deren Verlängerung) liegen. *Abb. 4* stellt die entsprechenden vier Quadrate dar. In allen diesen Fällen sieht man leicht ein, dass die Verbindungsstrecken M_1M_3 und M_2M_4 gleich lang und orthogonal zueinander sind. (Man verbindet M_1, M_2, M_3 und M_4 mit dem Mittelpunkt O von AC , dadurch entstehen die kongruenten Dreiecke M_1OM_3 und M_2OM_4 , deren Seiten auch orthogonal zueinander sind. O fällt in den ersten beiden Fällen mit dem Eckpunkt D zusammen.)

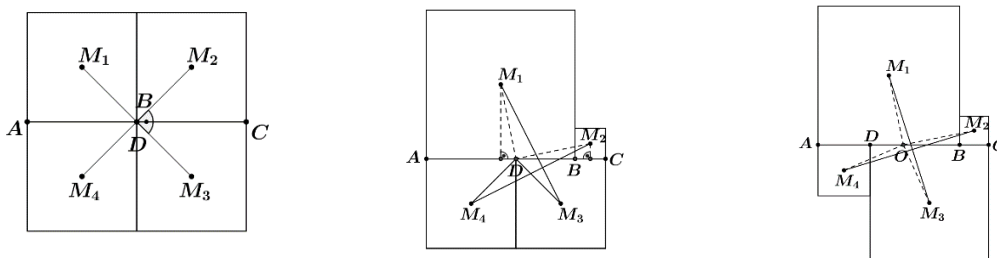


Abb. 4

In *Abb. 5* „erwacht“ das Viereck $ABCD$, indem die Eckpunkte B und D die Diagonale AC nacheinander verlassen. Die Lotfußpunkte B' und D' werden dabei eine wichtige Rolle spielen, da sie die Verbindung zum vorherigen Fall aus *Abb. 4* darstellen.

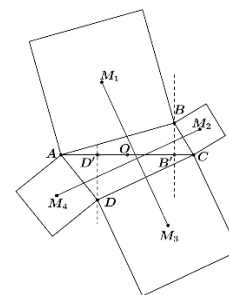


Abb. 5

Die geneigte Leserschaft ist eingeladen, die Lösung für den allgemeinen Fall der *Abb. 6* zu entnehmen. Dabei sollte auf die Veränderung der Quadratmittelpunkte $M'_1 \rightarrow M_1$ und $M'_2 \rightarrow M_2$ geachtet werden (zu zeigen $|M_1M'_1| = |M_2M'_2|$ und $M_1M'_1 \perp M_2M'_2$). Daraus resultiert: $\triangle M_1OM'_1 \cong \triangle M_2OM'_2$ sowie die Kongruenz und Orthogonalität der Strecken M_1O und M_2O .

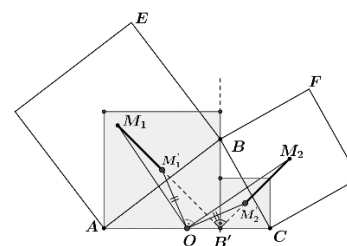


Abb. 6

Bemerkung: Die Kongruenz und Orthogonalität der Strecken M_1O und M_2O kann man auch aus den Dreiecken EAC und FAC (in denen sie Mittellinien sind) erhalten.

Ausgehend von einem speziellen Fall (einem entarteten Viereck), bei dem die Fragestellung einfach zu beantworten war, hat man durch kleinschrittiges

„Wackeln“ auch die allgemeine Fragestellung geklärt. Dabei lieferte der Mittelpunkt O der Diagonalen AC als Bezugspunkt für den Vergleich von aufeinanderfolgenden Zuständen den roten Faden.

4. Was bewirken kleine Änderungen?

Eine weitere Entdeckungsreise eröffnet sich, wenn man von einem speziellen Viereck $ABCD$ (z. B. Rechteck) ausgeht und dieses durch Verschiebung einzelner Eckpunkte schrittweise in ein allgemeines Viereck umwandelt. Die folgende Abbildung stellt die Metamorphose des Rechtecks $ABCD$ zum allgemeinen Viereck $A'B'C'D'$ dar.

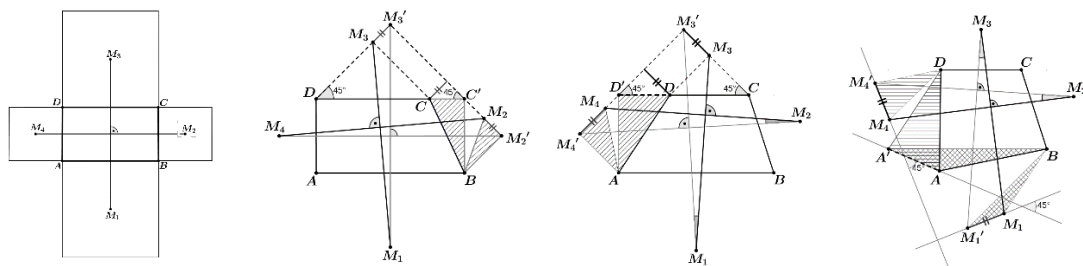


Abb. 7

Die tragende Idee liefert bei dieser Verwandlung des Rechtecks die Kongruenz und „Orthogonalität“ der Dreiecke $M_1M_3M_5$ und $M_4M_2M_5$.

Zusammenfassend lässt sich sagen, dass das systematische Vorgehen nicht nur das Problem gelöst hat, sondern in beiden Fällen zu weiteren Erkenntnissen geführt hat. Die Autorin weist als ergänzende Literatur zum Satz von van Aubel noch auf das Buch von Posamentier und Lehmann (2009) hin.

Literatur

- Alsina, C.; Nelsen, R. B. (2013). *Bezaubernde Beweise*. Berlin: Springer Spektrum.
- Duican, L.; Duican, I. (1987). *Transformări geometrice*. București: Editura științifică și enciclopedică
- Posamentier, A. S.; Lehmann, I. (2009): *Mathematical Amazements and Surprises: Fascinating Figures and Noteworthy Numbers*. New York: Prometheus Books.
- Schwank, I. (2003). Einführung in prädikatives und funktionales Denken. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, 35 (3), 70-78.