Annika M. WILLE, Alpen-Adria-Universität Klagenfurt, AT

„Und irgendwann im Unendlichen triffst du die 1“ – Studierendenvorstellungen zu $0,\overline{9}$

Für Schülerinnen und Schüler ist es nicht leicht, die Gleichung $0,\overline{9} = 1$ als richtig anzusehen (vgl. beispielsweise Danckwerts & Vogel 2006, Bauer 2011). Eine Schwierigkeit besteht darin, dass häufig intuitiv mit $0,\overline{9}$ der Prozess der Entstehung identifiziert wird und so der Eindruck entsteht, zwischen $0,\overline{9}$ und 1 müsse noch „etwas“ sein. In der Veranstaltung Didaktik der Analysis an der Alpen-Adria-Universität Klagenfurt im Wintersemester 2016/2017 wurde als ein Thema Folgen und Grenzwerte behandelt und als Teil dessen periodische Dezimalzahlen, insbesondere $0,\overline{9}$. In diesem Zusammenhang nennen Danckwerts und Vogel (2006, S. 32) Brüche zwischen innermathematischer Klärung und ursprünglichen Verstehen: Gehaltvolle Mathematik ließe sich „nicht als *bloße* Verstärkung des Alltagsdenkens verstehen“. Es komme vielmehr „darauf an, die Naht- und Bruchstellen zwischen intuitiver Vorerfahrung und theoretischer Begriffsbildung bewusst zu thematisieren.“ Auch die Studierenden der Veranstaltung sollten eine solche Thematisierung mit Hilfe einer Reflexion über die $0,\overline{9} = 1$-Problematik vornehmen. Der Fokus dieses Artikels liegt auf den Fragen, *was sich die Studierenden unter* $0,\overline{9}$ *vorstellen und welchen Einfluss diese Vorstellungen auf die Verwendung von Argumenten für eine Begründung von* $0,\overline{9} = 1$ *oder* $0,\overline{9} < 1$ *haben.*

Kursinhalt

Im Kurs ging es einerseits darum, Gelerntes aus der Analysis 1 über Folgen und Grenzwerte mit dem Inhalt der Schulmathematik zu verbinden und andererseits, Verständnisschwierigkeiten bei Schülerinnen und Schülern und Möglichkeiten des Umgangs mit ihnen zu diskutieren. Es wurde thematisiert, wie $0,\overline{9}$ als Grenzwert der Folge 0,9; 0,99; 0,999;… aufgefasst werden kann und wie (mit dem Archimedischen Axiom) $0,\overline{9} = 1$ folgt. Ebenfalls wurde besprochen, wie $0,\overline{9} = 1$ gefolgert werden kann, wenn man $0,\overline{9}$ als unendliche geometrische Reihe auffasst. Zusätzlich wurden schulmathematische Begründungen diskutiert, zum Beispiel ein Widerspruchsbeweis (vgl. Danckwerts & Vogel 2006, S. 29) und eine Argumentation, bei der ein Drittel mit $0,\overline{3}$ identifiziert wird, um mit Hilfe von $3 \cdot 0,\overline{3} = 0,\overline{9}$ auf die Gleichheit von $0,\overline{9}$ und 1 zu schließen. Es wurde besprochen, in welcher Weise in der zuletzt genannten Gleichung Erkenntnisse aus der Analysis für konvergente Folgen verwendet werden.

Methode

In der Veranstaltung Didaktik der Analysis im Wintersemester 2016/2017 schrieben Studierende in regelmäßigen Abständen Reflexionen. Für die Art der Reflexion sollte eine Kommunikationsform gewählt werden, die nicht nur den reinen formalen Beweis abfragt, sondern das Stellen von Fragen zulässt oder anstößt, eine Offenheit zulässt und die das Mündliche mit einbezieht im Hinblick auf den späteren Unterricht der Lehramtsstudierenden. Aus diesem Grunde wurde die Kommunikationsform der *erdachten Dialoge* (Wille 2008) gewählt. Ein erdachter Dialog ist eine Form des Schreibens im Mathematikunterricht. Dabei lässt ein Schreibender zwei Protagonisten eine mathematische Fragestellung diskutieren. Durch das Schreiben über das, was Protagonisten sagen, weisen erdachten Dialoge sowohl Merkmale von Schriftlichkeit als auch von Mündlichkeit auf (Wille 2017). Auf die Weise kommt eine Prozesshaftigkeit mit in die erdachten Dialoge hinein, die sich darin zeigen kann, dass der Schreibende erklärt, *wie* er sich etwas vorstellt und nicht nur was. Eine weitere Eigenschaft ist, dass sich der Schreibende einerseits in die beiden Protagonisten hineinversetzen kann, aber er kann sich auch andererseits von ihnen distanzieren. So kann die eigene Stimme einfließen, aber auch mehrere Stimmen, etwas kann von verschiedenen Perspektiven aus betrachtet werden, das Ausprobieren verschiedener Lösungswege ist möglich, und es besteht die Möglichkeit, dass der Schreibende wahrnimmt, keine Fehler machen zu können (vgl. ebd.). Die Aufgabenstellung für jeden Studierenden war, den folgenden *Anfangsdialog* als Einzelarbeit schriftlich fortzusetzen (dies taten insgesamt 14 Studierende):

> Zwei Studierende S1 und S2 unterhalten sich. Setzen Sie den Dialog fort.
>
> S1: Kannst du mir helfen, etwas zu verstehen?
>
> S2: Ja, klar. Was denn?
>
> S1: Wir wissen ja schon aus der Schule, dass 0,99999… gleich 1 ist. Aber jetzt verstehe ich auf einmal gar nicht mehr warum?
>
> S2: Das Ganze hat mit Folgen zu tun und ist tatsächlich gar nicht so einfach, wie man erst denkt.
>
> S1: Nicht?
>
> S2: Nein. Warte, ich versuche, es dir zu erklären!
>
> S1: Danke, aber sei gefasst darauf, dass ich viel nachfragen werde!

Die erdachten Dialoge der Studierenden wurden mit Hilfe einer Zwei-Schritt-Analyse untersucht. Zunächst wurde eine Interaktionsanalyse (vgl. Krummheuer & Naujok 1999) durchgeführt, bei der angenommen wurde, die Dialoge seien real gewesen. In einem zweiten Schritt wurde berücksichtigt, dass ein Studierender schrieb, was die Protagonisten „sagten". Insbesondere basiert die Analyse auf der Annahme, dass in dem Fall, wenn sich beide Protagonisten einig sind, der Schreibende seine eigenen Vorstellungen und Auffassungen formuliert.

Auswertung

Zunächst war in der Analyse überraschend, dass trotz der vorangegangenen Sitzungen und trotz des eher suggestiven Dialoganfangs sechs Studierende zu dem Schluss kamen, $0,\overline{9}$ sei kleiner 1 oder es war nicht eindeutig zu interpretieren. In den erdachten Dialogen der Studierenden zeichnen sich unterschiedliche Vorstellungen von dem ab, was $0,\overline{9}$ und ein Grenzwert sein kann. So schreibt beispielsweise eine Studentin:

> „Es ist immer wichtig in der Analysis den Blickwinkel nicht zu eng zu nehmen, denn dann entgeht einem das Offensichtliche, und zwar wieso $0,\overline{9}$ nicht 1 ist. Bei diesem Beispiel ist es leichter an Grenzwerte zu denken. Hier ist 1 der Grenzwert, deshalb darf $0,\overline{9}$ auch nicht 1 sein."

Hier zeigt sich, dass die Vorstellung, $0,\overline{9}$ sei ein Grenzwert, schwierig sein kann. Ähnlich ist es bei einer anderen Studentin, die in ihrem erdachten Dialog die Gleichung $3 \cdot 0,\overline{3} = 0,\overline{9}$ nennt und dort die 3 als Grenzwert identifiziert, ohne zu sagen, von welcher Folge.

Zum Teil kommen die Studierenden zu gar keinem klaren Ergebnis. So schreibt ein Student: „S1: Also $0,\overline{9} \neq 1$? S2: Ja und nein." Im Weiteren beschreibt er den Grenzwert als einen „Wert, der im Unendlichen erreicht werden soll". Es sei daher ein „Beispiel, das ewig weiter geht". Nur als Vereinfachung würde man an dieser Stelle mit der 1 weiter rechnen.

Auffällig ist in den erdachten Dialogen, dass häufig dieselben Argumente benannt werden, die Argumente werden jedoch unterschiedlich bewertet und dadurch entweder als Begründung für $0,\overline{9} = 1$ oder für $0,\overline{9} < 1$ genommen. So wurde zum Beispiel das Argument, das von der Gleichung $\frac{1}{3} = 0,\overline{3}$ ausgeht, mehrfach angeführt. Dieser Inhalt wurde von einigen Studierenden so interpretiert, dass der ganze Beweis nicht stimme und daher $0,\overline{9} < 1$ sei.

Durch die Aspekte der Mündlichkeit, die durch die Form eines erdachten Dialoges mit hineinkommen, wurde ersichtlich, wie sicher sich der Schreibende bei Aussagen war oder wie er oder sie Aussagen bewertete. Ebenso konnten Widersprüche im Laufe des erdachten Dialogs auftreten. Diese wären mit einer Form, bei der sich die Studierenden zunächst für Gleichheit oder Ungleichheit entscheiden müssen und danach ihre Entscheidung begründen sollen, nicht sichtbar geworden.

Fazit

Erdachte Dialoge haben sich als ein hilfreiches Werkzeug erwiesen, um an die Vorstellungen der Studierenden während der Veranstaltung heranzukommen und einen Einblick dahinein zu erhalten, wie die Studierenden Aussagen bewerten oder wie sicher sie sich sind. Die Auswertung zeigt außerdem, wie sehr Vorstellungen der Studierenden einen Einfluss darauf haben, wie sie Veranstaltungsinhalte auffassen. Die Ergebnisse zeigen, wie schwer es selbst für Studierende ist, die die Analysis 1 gehört und zusätzlich die $0,\overline{9}$-Problematik behandelt haben, neben den Blick auf einen Prozess, auch den Blick auf ein Produkt einzunehmen, also bei $0,\overline{9}$ nicht allein den Prozess des Aufschreibens oder den Prozess der aufeinanderfolgenden Folgenglieder zu sehen, sondern $0,\overline{9}$ selbst als Grenzwert aufzufassen. Die Naht- und Bruchstelle zwischen intuitiver Vorerfahrung und theoretischer Begriffsbildung, wie sie bei Schülerinnen und Schülern auftreten kann, kann ebenfalls bei Studierenden auftreten, hier auch erweitert als Naht- und Bruchstelle zwischen schulischer Vorerfahrung und universitärer Begriffsbildung.

Literatur

Bauer, L. (2011). Mathematik, Intuition, Formalisierung: eine Untersuchung von Schülerinnen- und Schülervorstellungen zu $0,\overline{9}$. *Journal für Mathematik-Didaktik*, 32, 79-102.

Danckwerts, R., & Vogel, D. (2006). *Analysis verständlich unterrichten*. München: Spektrum Akademischer Verlag.

Krummheuer, G. & Naujok, N. (1999). *Grundlagen und Beispiele Interpretativer Unterrichtsforschung.* Opladen: Leske + Budrich.

Wille, A. M. (2008). Aspects of the concept of a variable in imaginary dialogues written by students. In O. Figueras, J. Cortina, S. Alatorre, T. Rojano & A. Seulveda (Eds.), *Proceedings of the 32nd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (PME32)*, vol. 4 (pp. 417-424). Cinvestav-UMSNH, Mexico.

Wille, A. M. (2017). Imaginary Dialogues in Mathematics Education. *Journal für Mathematik-Didaktik, 38, 29-55*.