Simon ZELL, Pädagogische Hochschule Schwäbisch Gmünd, DE

Zum inhaltlichen Lösen von Gleichungen in der Klassenstufe 10

Um mathematische Aufgaben möglichst effektiv und ökonomisch zu lösen, sind Fähigkeiten im inhaltlichen Lösen unerlässlich. Nach Fanghänel (1984) erfolgt inhaltliches Lösen von Aufgaben dann, „wenn sich der Aufgabenlöser durch Erfassen von Eigenschaften und Beziehung, durch Deutung von Symbolen, durch Nutzung vorhandener theoretischer Kenntnisse klare Vorstellungen über den vorgegebenen Sachverhalt verschafft und diese zum Erreichen des Zieles, d.h. dem Lösen der jeweiligen Aufgabe einsetzt.“ (Fanghänel, 1984, S.99). Inhaltliches Lösen bezieht sich also immer auf den Kontext einer konkreten Aufgabe. Es geht also darum, eine Aufgabe nicht nach einem vorgefertigten Muster oder Lösungsverfahren, sondern durch bewusstes Ausnutzen der Struktur eines mathematischen Problems zu lösen. Setzt man im Unterricht zu stark auf vorgegebene Lösungsmuster, besteht die Gefahr, „daß inhaltliches Verständnis durch formale Kenntnis von Sätzen und Verfahren ersetzt und damit ein Anwenden des Erlernten unter veränderten Bedingungen wesentlich erschwert“ wird (Fanghänel, 1984, S.7). Diese Gefahr besteht im Unterricht gerade beim Lösen von Gleichungen, zu denen es meist rasch erlernbare Lösungsregeln gibt. Nicht zufällig ist der Ursprung der häufigsten Fehler das fehlerhafte Erfassen der Struktur gegebener Terme (vgl. Barzel & Holzäpfel, 2011, S. 5). Betrachtet man die Ziele der Behandlung von Gleichungen im Unterricht, so ist nach Henning (1998) neben der Herausbildung von Kalkülen für das Lösen einzelner Gleichungstypen und neben der Entwicklung von Können im graphischen Lösen von Gleichungen und die Entwicklung eines inhaltlichen Verständnisses für grundlegende Begriffe der Gleichungslehre ein wesentliches Ziel. Dieses inhaltliche Verständnis ist „Voraussetzung und Resultat für ‚inhaltliches Lösen von Gleichungen‘ “ (Henning, 1998, S.39). Auch Walsch (1992) betont, dass die Behandlung von Gleichungen nicht nur auf den mengentheoretischen Aspekt reduziert werden darf, sondern den Schülerinnen und Schülern auch die Reichhaltigkeit des Gleichungsbegriffs und dessen Anwendung in anderen Fächern deutlich werden muss. Die Anwendung mathematischer Begriffe im Rahmen eines fächerübergreifenden Mathematikunterrichts bedingt geradezu ein inhaltliches Verständnis mathematischer Begriffe und Prozeduren. Dadurch kommen die Vorzüge und Begründungen fächerübergreifenden Unterrichts, Ganzheitlichkeit und Erkennen gemeinsamer Strukturen und Grenzen fachspezifischer Sichtweisen erst richtig zum Tragen (vgl. Zell (2010), S.33). Das inhaltliche Lösen von Gleichungen ist also ein wichtiger Baustein bei der Behandlung von Gleichungen im Unterricht.

Flade et. al. (1992), S.16 greifen die allgemeine Definition von Fanghänel (1984) auf und sprechen von inhaltlichem Lösen von Gleichungen, wenn sich die Schülerinnen und Schüler klare Vorstellungen über die in einer Gleichung ausgedrückte Bedingung und deren Folgerungen verschaffen und diese zum Bestimmen einer Lösung bewusst einsetzen. Ein anderer Ansatz zur Abgrenzung zwischen inhaltlichem und schematischem Lösen von Gleichung ist der Einsatz heuristischer Verfahren, falls eine Gleichung inhaltlich gelöst wird (Rosin, 1984, S.39). Die Bedeutung eines strukturellen Verständnisses beim Lösen von Gleichungen wird von Kieran (1989) hervorgehoben. Sie listet dort Studien auf, welchen belegen, dass ein Verknüpfen von „intuitiven" und formalen Prozessen beim Lehren der Lösungsverfahren von Gleichungen zu besseren Ergebnissen führt, als wenn nur ein Ansatz gelehrt wird. Die Anwendung inhaltlichen Lösens variiert zwischen der Unter-, Mittel- und Oberstufe (vgl. Flade et. al., 1992, S.16). In der Unterstufe hilft das inhaltliche Lösen insbesondere beim Festigen der Grundaufgaben der Addition bzw. Multiplikation. In der Mittelstufe hilft das inhaltliche Lösen, Begriffe der Gleichungslehre besser zu erfassen und kann Ausgangspunkt für das Entdecken der Umformungsregeln zum Lösen von linearen Gleichungen sein. In der Oberstufe ermöglicht inhaltliches Lösen das Entwickeln kreativer Herangehensweisen an das Lösen von Gleichungen und ein systematisches begründetes Vorgehen unter Zuhilfenahme theoretischer Kenntnisse.

Betrachtet man Studien zum inhaltlichen Lösen von Gleichungen, stellt man fest, dass diese meist in den Klassenstufen 6-8 stattfanden (vgl. z.B. Demby (1997) oder Flade & Mounnarath (1992)). Kieran (1989) weist auf Studien an Hochschulen hin. Diese beschränken sich allerdings auf algebraische Repräsentationsformen. Will man ein umfassenderes Verständnis im inhaltlichen Lösen von Gleichungen erzielen, sollten allerspätestens in der Oberstufe auch andere Darstellungsformen angesprochen werden, also auch insbesondere auf die Verknüpfung von Gleichungs- und Funktionsbegriff hinweisen. Daher wurde ein Test zum inhaltlichen Lösen von Gleichungen entwickelt, um festzustellen in welchem Maße Schülerinnen und Schüler der Klassenstufe 10 Gleichungen inhaltlich lösen. Gleichungen, die vorwiegend inhaltlich gelöst werden sollten, weisen nach Rosin (1984) zwei verschiedene Merkmale auf. Zum einen sollte die Struktur der Terme bezogen auf den Löser möglichst einfach sein, indem z.B. ein Term eine Konstante ist oder die Terme Summen oder Produkte aus zwei Faktoren sind usw. Zum anderen sollten die vorkommenden Termwerte im Kopf zu berechnen sein. Gleichungen dieser Art werden in Flade et. al. (1992) S.15 vorgestellt. Entsprechend dieser Überlegungen sind die Aufgaben unseres Tests relativ kurz, so dass die Gleichungen von der Struktur der Terme her möglichst einfach sind. In Aufgabe 1 wird konkret nach der Lösung einer quadratischen und drei exponentiellen Gleichungen gefragt. Die letzten beiden Gleichungen sollten ohne das Logarithmus-Kalkül gelöst werden, um inhaltlichen Lösen zu erzwingen. Die zweite Aufgabe verlangt Begründungen, die sowohl rechnerisch mit Hilfe der Lösungen linearer und quadratischer Gleichungen als auch durch Argumente, welche sich aus der Struktur der Gleichung ergeben, erbracht werden können. In der folgenden Aufgabe sollten Begründungen ohne Rechnungen erbracht werden. Neben dem Anwenden eines algebraischen Kalküls sollten Gleichungen auch graphisch gelöst werden, d.h. es sollte unter Nutzung von Funktionsgraphen argumentiert werden. In Aufgabe 4 sind die Graphen von Grundfunktionen, welche bis zur Klassenstufe 10 eingeführt gegeben und mögliche Funktionsgleichungen gesucht. Diese Aufgabe wurde konzipiert, um eine solidere Fehleranalyse beim graphischen Lösen von Gleichungen durchzuführen. Eine Aufgabe des Tests verlangt Begründungen zur Lösbarkeit von Gleichungen mithilfe von Funktionsgraphen. Die Schülerinnen und Schüler sind gezwungen, die Struktur der Gleichung zu erfassen und einen Funktionsgraphen sinnvoll zu skizzieren. Ebenso müssen Sie das Prinzip des graphischen Lösens von Gleichungen, also das Finden der Schnittstelle zweier Funktionsgraphen erkennen und nutzen. Inwieweit der Übergang von Gleichung zum Funktionsgraphen gelingt, wird in einer weiteren Aufgabe abgeprüft. Hier müssen die Schülerinnen und Schüler die Gleichung einer Wurzelfunktion einem von drei gegebenen Funktionsgraphen zuordnen. Da die Wurzelfunktion im aktuellen Bildungsplan nicht gefordert wird, ist anzunehmen, dass diese Funktion für die Schülerinnen und Schüler neu ist und daher die Struktur der Gleichung untersucht werden muss.

Der Test wurde in neun Klassen aus drei verschiedenen Gymnasien durchgeführt. Insgesamt nahmen 149 Schülerinnen und Schüler daran teil.

Die Ergebnisse zeigen, dass formale Rechenverfahren sehr dominant sind. Nur ein Schüler löste die Gleichung $x^2-10x+25=0$ mit Hilfe der binomischen Formel, der Rest der Schülerinnen und Schüler nutzten die Lösungsformel. Die Aufgabe „Begründe: $2x-4=0$ hat eine positive Lösung" lösten nur 20,1 % ohne Rechnung. Davon haben 16,1% über die durchgeführten Rechenschritte argumentiert, also die Gleichung im Kopf durchgeführt. Um zu begründen, dass die Funktion $f(x)=x^2+2x+1$ keine positiven Nullstellen hat, führten nur 16,7% keine Rechnung durch. 63,1% nutzten die Lösungsformel und bestimmten die Lösungen. Nur 28,9% davon nannten neben der Rechnung eine Begründung. Dieses Beispiel zeigt exemplarisch, dass Begründungen mit Hilfe der Termstruktur nicht präsent sind. Dies zeigt sich auch bei der Aufgabe zum Schaubild einer Geraden einen passenden Funktionsterm zu finden und diesen zu begründen. Nur 11,7% haben eine korrekte und vollständige Begründung aufgeschrieben, bei der auf y-Achsenabschnitt und Steigung eingegangen wird. 12,8% haben einen Maßstab erstellt und konkrete Werte für die beiden Parameter bestimmt. Die Anwendung von Funktionsgraphen zum graphischen Lösen ist nur schwach ausgeprägt. So sind viele Schülerinnen und Schüler in der Lage Wurzelfunktionen zu identifizieren und zu zeichnen. 77,2% zeichneten die Funktion $f(x) = \sqrt{x-4}$ korrekt. Jedoch lösten nur 8,7% die Gleichung $\sqrt{x} = x$ graphisch korrekt. Dies schließt jene Schülerinnen und Schüler mit ein, die diese Gleichung zu $\sqrt{x} - x = 0$ umformten und anschließend mit Nullstellen argumentierten. Die Gleichung $\sqrt{x-1} = 4x$ lösten nur noch 4,7%; 43,6% haben dort gar nichts aufgeschrieben.

Es bestehen also erhebliche Defizite im inhaltlichen Lösen von Gleichungen und konkreter Forschungsbedarf, um Unterricht auf diesem Gebiet zu verbessern und zu fördern.

Literatur

Barzel, B. & Holzäpfel, L. (2011). Gleichungen verstehen. *Mathematik Lehren, 109, 2-7*

Demby, A. (1997). Algebraic procedures used by 13-to15-year-olds. *Educational Studies in Mathematics,* 33, 45–70.

Fanghänel, G. (1984). Zum Arbeiten mit Aufgaben im Mathematikunterricht an den zehnklassigen allgemeinbildenden polytechnischen Oberschulen der DDR. Berlin, *Akad. d. Pädag. Wiss. d. DDR, Diss. B.*

Flade, L., Goldberg, E. & Mounnarath, V.N. (1992). Inhaltliches Lösen von Gleichungen – eine legitime Methode. *Mathematik Lehren, 51, S.15-18.*

Flade, L. & Mounnarath, V.N. (1992). Zur Könnensentwicklung beim Lösen linearer Gleichungen – Ergebnisse aus mehreren Ländern. *Mathematik Lehren, 51, S.11-14.*

Henning, H. (1998). Gleichungen … und was dahinter steckt! *Mathematische Unterrichtspraxis, 1*, 39–46.

Kieran, C. (1989). The Early Learning of Algebra: A Structural Perspective. In Wagner, S. & Kieran, C. (Hrsg.), *Research issues in the learning and teaching of algebra* (S. 33-56). Reston: National Council of Teachers of Mathematics.

Rosin, H. (1984). Inhaltliches Lösen von Gleichungen. *Mathematik in der Schule, 22(1), S.38-44.*

Walsch, W. (1992). Gleichungen im Mathematikunterricht. *Mathematik Lehren, 51, S.6-10.*

Zell, S. (2010). *Fächerübergreifende Elemente im Mathematikunterricht zur Förderung von mathematical literacy*. Franzbecker, Hildesheim, Berlin.