Carina ZINDEL, Technische Universität Dortmund, DE

Den Funktionsbegriff im Kern verstehen – ein Förderansatz

Zahlreiche Studien beschäftigen sich mit dem Lehren und Lernen des Funktionsbegriffs und nutzen dabei viele verschiedene Begriffe und Kategorisierungen (vgl. Niss, 2014; für Beispiele vgl. Oehrtman, Carlson, & Thompson, 2008; Leinhardt, Zaslavsky, & Stein, 1990). Eine wichtige Rolle spielen dabei die vier Darstellungen des Funktionsbegriffs (verbal, symbolisch, numerisch und graphisch). Deren Vernetzung ist für Lernende nicht selbstverständlich, sondern kann eine große Herausforderung darstellen (Niss, 2014; Leinhardt et al., 1990). Erklärungsansätze liegen darin, dass jede dieser Darstellungen gewisse Aspekte des Funktionsbegriffs umfasst, aber keine Darstellung alle Aspekte gleichermaßen beinhaltet, sodass der gemeinsame Kern jeweils verdeckt bleibt (Niss, 2014, S. 240). Offen bleibt die Frage, wie dieser Kern des Funktionsbegriffs konzeptualisiert werden kann. Dies stellt aber eine notwendige Voraussetzung dar, um eine Förderung zum Verstehen des Kerns konzipieren zu können. Im Folgenden wird daher zunächst ein Modell vorgestellt, das den Kern des Funktionsbegriffs beschreibt, bevor ein kurzer Ausblick gegeben wird, inwiefern dies für eine Förderung nutzbar gemacht werden kann.

Methodischer Hintergrund

Nach dem Forschungsprogramm der fachdidaktischen Entwicklungsforschung (Prediger et al., 2012) wurden in 4 Zyklen 19 Designexperimente mit je zwei Lernenden (Jgst. 8-11) im Laborsetting und 3 Designexperimente im Klassensetting (Jgst. 9-10) durchgeführt, videographiert, partiell transkribiert und qualitativ analysiert (u.a. hinsichtlich der adressierten Facetten, vgl. Abbildung 1). Mit Facetten werden hier die Verstehenselemente bezeichnet, die für ein Verständnis des ganzen Begriffs erforderlich sind (Drollinger-Vetter, 2011, S. 186). Sie werden im Folgenden mit ||…|| gekennzeichnet.

Facettenmodell zur Beschreibung des Kerns des Funktionsbegriffs

Der Kern des Funktionsbegriffs wird verstanden als die Zusammenfassung der Facetten des Funktionsbegriffs, die in allen Darstellungen und bei allen Funktionstypen zentral und identifizierbar sind. Das Facettenmodell in Abbildung 1 fasst den Kern des Funktionsbegriffs zusammen (Prediger & Zindel, im Druck). Die ||Funktionale Abhängigkeit|| als verdichtete Facette umfasst alle weiteren Facetten. Sie kann aufgefaltet werden in die ||unabhängige Variable|| und die ||abhängige Variable||. Diese Unterscheidung ist auch Bestandteil zahlreicher Konzeptualisierungen von Funktionen in der bisherigen

Forschung (Leinhardt et al., 1990; Oehrtman et al., 2008). Es erfordert allerdings weitere Einsichten, um die ||unabhängige Variable|| und die ||abhängige Variable|| tragfähig zu identifizieren. Dazu sollten die Facetten flexibel *aufgefaltet* und *verdichtet* werden können. Diese Prozesse sind im Modell als ab- bzw. aufsteigende Linien dargestellt. Entscheidend ist beispielsweise, dass die Lernenden die Relevanz der ||Richtung der Abhängigkeit|| erkennen. Viele Lernende verwechseln die ||unabhängige Variable|| und die ||abhängige Variable|| oder beachten die ||Richtung der Abhängigkeit|| erst gar nicht. Eine weitere Voraussetzung zur Erfassung der gesamten funktionalen Abhängigkeit ist es, die beiden ||beteiligten Größen|| zu identifizieren bzw. zu wissen, dass es überhaupt um den Zusammenhang von genau *zwei* Größen geht. Schließlich ist es auch wichtig, diese beiden ||beteiligten Größen|| auch als ||variable Größen|| wahrzunehmen (Thompson, 2011).

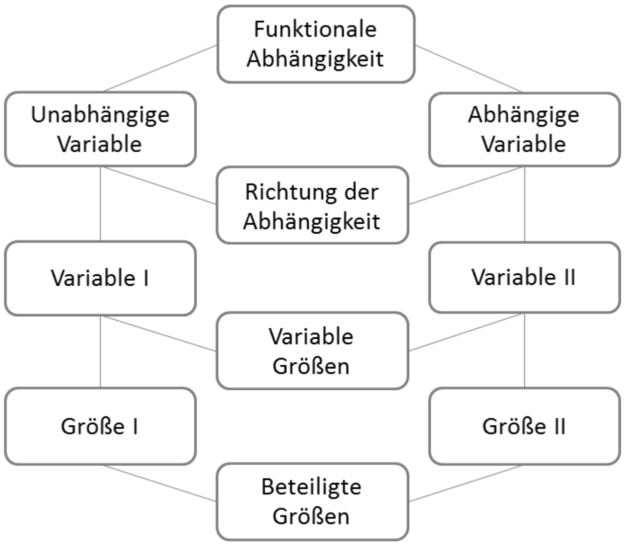

Abbildung 1: Facettenmodell zum Kern des Funktionsbegriffs

Die Gegenüberstellung von tragfähigen und nicht tragfähigen Bearbeitungen von Textaufgaben durch Lernende hat gezeigt, wie wichtig gerade das Herstellen von Bezügen zwischen den Facetten ist (Zindel, 2015; Prediger & Zindel, im Druck). Eine zentrale Herausforderung ist es, diese Facetten flexibel und situationsangemessen *aufzufalten* und zu *verdichten*. Je nach Situation kann es auch angemessen sein, weitere, hier nicht aufgeführte Facetten zu adressieren, die nicht mehr zum Kern gehören. Bei der Klärung einer linearen funktionalen Abhängigkeit kann es zum Beispiel auch sinnvoll sein, die Änderungsrate zu fokussieren. Lernenden sollte allerdings bewusst sein, dass dieses Vorgehen für andere Funktionstypen nicht mehr tragfähig ist. Ansonsten könnte es zu Übergeneralisierungen kommen (vgl. Leinhardt et al., 1990).

Facettenmodell als Analyseinstrument

Das kurze Beispiel von Dennis (Abbildung 2) gibt einen ersten Einblick, inwiefern das Modell zur Beschreibung von Hürden genutzt werden kann. Dennis bearbeitet eine Aufgabe, in der sowohl die symbolische Darstellung als auch die verbale Darstellung („Die Funktionsgleichung gibt den Kraftstoffverbrauch in Abhängigkeit von der Geschwindigkeit an“) gegeben sind und miteinander in Bezug gesetzt werden müssen (vgl. Prediger & Zindel, im Druck; Zindel, 2015).

Dennis: x ist die Geschwindigkeit, da man – der Kraftstoffverbrauch ist jetzt – weiß ich jetzt nicht genau, was das dabei sein soll – aber x ist die Geschwindigkeit, so dass man für x immer etwas anderes einsetzen kann.

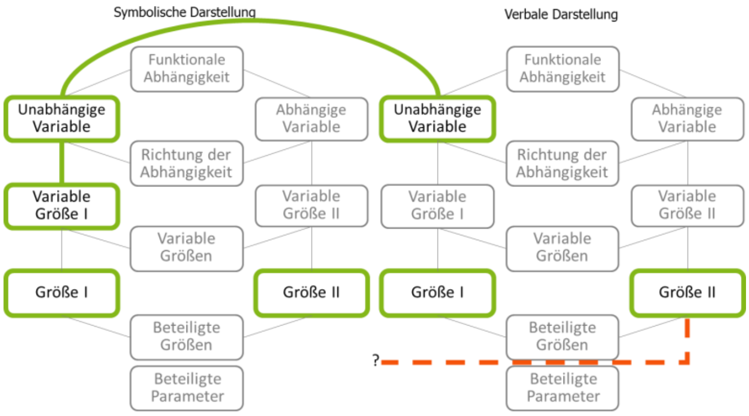

Abbildung 2: Von Dennis adressierte Facetten

Dennis kann die ||unabhängige Variable|| in beiden Darstellungen identifizieren und begründet dies über seine Einschätzung, dass man für die ||unabhängige Variable|| in der symbolischen Darstellung „immer etwas anderes einsetzen kann". Dabei nimmt er diese insbesondere als ||variable Größe|| wahr. Außerdem identifiziert er in der verbalen Darstellung auch die ||Größe II||, kann diese aber nicht auf die symbolische Darstellung beziehen.

Entwicklung einer Lernumgebung

Das Facettenmodell zur Beschreibung des Kerns des Funktionsbegriffs diente anschließend auch als normativer Rahmen zur Planung der Förderung.

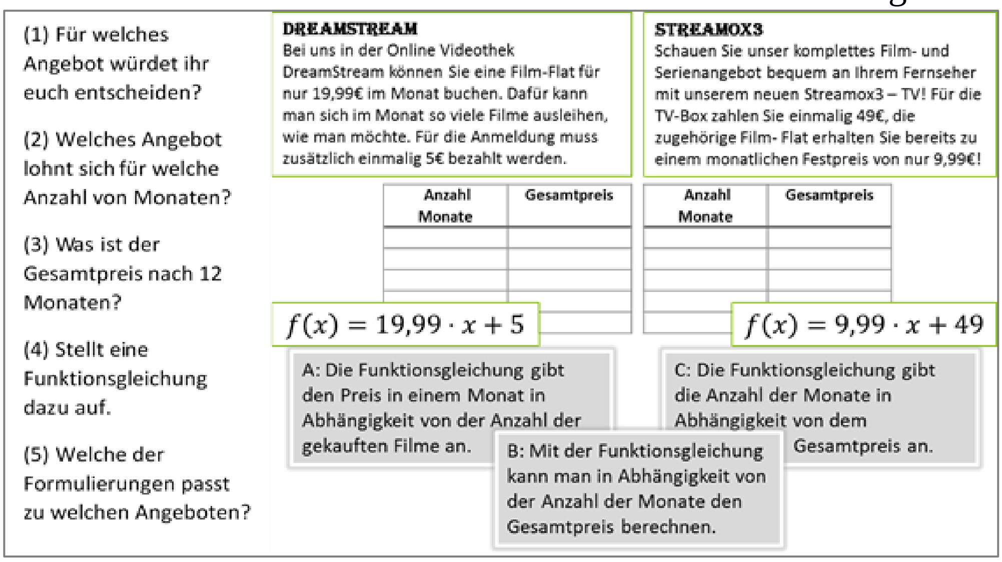

Abbildung 3: Ausschnitt der Lehr-Lernumgebung (Tabelle und Funktionsgleichung werden von den Lernenden aufgestellt, die Formulierungen sind vorgegeben, vgl. Prediger & Zindel, im Druck)

Als ein Designelement wurde die Formulierungsvariation eingesetzt: Um die gezielte Auseinandersetzung mit den Facetten des Kerns des Funktionsbegriffs anzuregen, wurden die Lernenden mit Formulierungen konfrontiert, die genau in einzelnen Facetten des Modells variieren (Abbildung 3).

Fazit und Ausblick

In diesem Beitrag wurde der von Niss (2014) angesprochene Kern des Funktionsbegriffs theoretisch ausdifferenziert. Das Facettenmodell fasst die Facetten zusammen, die in allen Darstellungen und bei allen Funktionstypen identifizierbar und gleichermaßen relevant sein können. Das Modell dient einerseits als Grundlage zur Diagnose von potenziellen Hürden und andererseits als normativer Rahmen zur Planung einer entsprechenden Lernumgebung zur Förderung.

Im Vortrag wurde ein vertiefter Einblick gegeben, wie das Facettenmodell als Analyseinstrument genutzt und inwiefern Lernprozesse zum Aufbau konzeptuellen Verständnisses zum Kern des Funktionsbegriffs hiermit beschrieben und visualisiert werden können. Außerdem wurde auf die Rolle der Sprache im Umgang mit funktionalen Abhängigkeiten eingegangen.

Literatur

Drollinger-Vetter, B. (2011). *Verstehenselemente und strukturelle Klarheit: Fachdidaktische Qualität der Anleitung von mathematischen Verstehensprozessen im Unterricht.* Münster u.a.: Waxmann

Leinhardt, G., Zaslavsky, O., & Stein, M. K. (1990). Functions, Graphs, and Graphing: Tasks, Learning, and Teaching. *Review of Educational Research, 60*(1), 1–64.

Niss, M. A. (2014). Functions Learning and Teaching. In S. Lerman (Hrsg.), *Encyclopedia of Mathematics Education* (S. 238–241). Dordrecht: Springer Netherlands.

Oehrtman, M., Carlson, M., & Thompson, P. W. (2008). Foundational reasoning abilities that promote coherence in students' function understanding. In M. P. Carlson & C. Rasmussen (Hrsg.), *Making the connection: Research and practice in undergraduate mathematics* (S. 27–42). Washington, DC: Mathematical Association of America.

Prediger, S., Link, M., Hinz, R., Hußmann, S., Thiele, J., & Ralle, B. (2012). Lehr-Lernprozesse initiieren und erforschen: Fachdidaktische Entwicklungsforschung im Dortmunder Modell. *Der mathematische und naturwissenschaftliche Unterricht, 65*(8), 452–457.

Prediger, S., & Zindel, C. (im Druck). School academic language demands for understanding functional relationships – a design research project on the role of language in reading and learning. *Eurasia Journal of Mathematics, Science & Technology Education*.

Thompson, P. W. (2011). Quantitative Reasoning and Mathematical Modeling. In L. L. Hatfield, S. Chamberlain, & S. Belbase (Hrsg.), *New perspectives and directions for collaborative research in mathematics education: papers from a planning conference for WISDOM* (S. 33–57). Laramie, WY: University of Wyoming.

Zindel, C. (2015). „Wenn ich wüsste, was davon was ist…“ – konzeptuelle und sprachliche Hürden bei funktionalen Abhängigkeiten. In F. Caluori, H. Linneweber-Lammerskitten, & C. Streit (Eds.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2015* (S. 1024–1027). Münster: WTM Verlag.