Burkhard ALPERS, Aalen

Unterschiedliche Sichtweisen von Mathematikern und Maschinenbauingenieuren auf die Mathematik am Beispiel der Stetigkeit

1. Einleitung

Es ist zu vermuten, dass sich die „Sichtweise“ von Mathematikern auf die Mathematik als eigenständige, von Mathematikern betriebene Wissenschaft von der „Sichtweise“ anderer Wissenschaftler unterscheidet. Wie man die Sichtweisen und damit auch die Unterschiede erfassen könnte, ist Gegenstand des vorliegenden Artikels. Dazu wird der Begriff der Sichtweise näher erläutert und auf methodische Fragen der Erfassung eingegangen. Dann werden die unterschiedlichen Sichtweisen am Beispiel „Stetigkeit“ anhand der Darstellung und Nutzung in zwei Lehrbüchern zur Analysis bzw. Statik näher untersucht.

2. Der Begriff „Sichtweise“ und methodische Fragen seiner Erfassung

Zunächst ist der Begriff „Sichtweise“ näher zu erläutern. Der hier benutzte Begriff soll folgende Komponenten beinhalten:

- Wie werden mathematische Begriffe definiert und was wird als „valide“ mathematische Erkenntnis angesehen?
- Welche Art von mathematischen Erkenntnissen wird für wesentlich und interessant gehalten (Klassifikationen, Berechnungsverfahren)?
- Welche sinnvollen Nutzungsweisen werden gesehen und auch verwendet (Beweis anderer Aussagen, Anwendungsprobleme)?

Es erweist sich allerdings als problematisch, von der Sichtweise „des Mathematikers“ bzw. „des Ingenieurs“ zu reden. So kann beispielsweise „der Mathematiker“ als mathematischer Forscher oder Autor mathematischer Abhandlungen für Mathematiker auftreten oder aber auch als Dozent für Mathematik in Anwendungsstudiengängen oder als Mathematiker in Berechnungsabteilungen in der Industrie. Ebenso kann „der Ingenieur“ etwa als Lehrender eines mathematikhaltigen Anwendungsfaches auftreten, als Forscher in der angewandten Berechnung (etwa in den Grundlagen der Mechanik), als gerade graduierter Jungingenieur oder als erfahrener Ingenieur in der Industrie.

Im Folgenden sind einige Untersuchungsmöglichkeiten aufgelistet, wie man die Sichtweise eines Mathematikers (in bestimmter Rolle) erfassen kann:

In Fachgruppe Didaktik der Mathematik der Universität Paderborn (Hrsg.)
Beiträge zum Mathematikunterricht 2018. Münster: WTM-Verlag

- Untersuchung mathematische Darstellungen in Lehrbüchern, Abhandlungen sowie Forschungsartikeln für Mathematiker.
- Untersuchung mathematische Darstellungen in Lehrbüchern zur Mathematik für Ingenieure.
- Nutzung von Erkenntnissen zur Philosophie der Mathematik.
- Nutzung von Ausführungen anerkannter Mathematiker (z.B. Courant & Robbins (2010)).
- Befragung von Mathematikern (Interviews, Fragebögen).

Will man die Sichtweise eines Ingenieurs (in einer bestimmten Rolle) auf die Mathematik erfassen, so kann man folgendermaßen vorgehen:

- Untersuchung der Nutzung mathematischer Konzepte in der Anwendungsliteratur (z.B. Lehrbücher) (siehe z.B. Alpers (2017)).
- Befragung von Ingenieuren (vgl. z.B. Goold & Devitt (2012)).
- Untersuchung mathematikhaltiger Artefakte aus der Industriepraxis.

Im Folgenden wird der jeweils erstgenannte Ansatz exemplarisch verfolgt, indem die Sichtweise auf das Thema „Stetigkeit“ im Analysis 1 Lehrbuch von Heuser (2009) und im Statik-Lehrbuch von Gross et al. (2013) untersucht wird.

3. Sichtweise eines Mathematikers auf das Thema „Stetigkeit“

Im Analysis-Lehrbuch von Heuser wird der Stetigkeitsbegriff eingebettet in einen axiomatischen Aufbau mit wohldefinierten Begriffen und streng logischer Herleitung. Zunächst wird Stetigkeit an einer Stelle des Definitionsbereichs eingeführt und später auf Funktionen in ihrem gesamten Definitionsbereich erweitert. Nach einem anschaulichen Beispiel mit einem Sprung werden auch „konstruierte“ Beispiele wie die Dirichlet-Funktion angeführt. Solche Beispiele dienen dazu, die Grenzen eines Begriffs auszuloten, indem man nur die durch die Definition garantierten Eigenschaften nutzt. Heuser schreibt bereits bezüglich der axiomatischen Beschreibung der reellen Zahlen (S. 35): „… gehe mit diesen Objekten um nach gewissen Regeln, die in den Axiomen fixiert sind, und sieh zu, welche Folgerungen Du durch regelrechtes Schließen gewinnen kannst. *Was diese Objekte sind, was ihr „Wesen“ ist, braucht Dich im übrigen nicht zu kümmern*.“ (siehe ähnlich Courant & Robbins, p. XXII).

Zum besseren Verstehen der Definition und um Spezialisierungen und Verallgemeinerungen zu erlauben, werden äquivalente Definitionen aufgeführt und bewiesen: Die $\varepsilon\delta$-Definition führt später zum Begriff der gleichmäßigen

Stetigkeit durch Weglassen des Bezugs auf eine Stelle, die Definition mit offenen Mengen erlaubt die Verallgemeinerung auf topologische Räume.

Die weiteren Ausführungen bestehen dann im Wesentlichen aus Sätzen über die Stetigkeit gewisser Funktionsklassen und Sätze über Stetigkeit bei Konstruktion neuer Funktionen aus existierenden (mit Beweisen). Dann werden wichtige Eigenschaften stetiger Funktionen bewiesen (z.B. Zwischenwertsatz), die später auch in den Beweisen anderer Aussagen genutzt werden können. Zudem wird der Zusammenhang mit anderen Begriffen untersucht, insbesondere mit der Monotonie.

Schließlich werden anhand des Begriffs des Grenzwerts einer Funktion unstetige Stellen aus dem Definitionsbereich in hebbare und nicht-hebbare Unstetigkeiten unterteilt.

4. Sichtweise eines Ingenieurs auf das Thema „Stetigkeit“

Bei Gross et al. (2013) tritt das Konzept der Stetigkeit nur im Kapitel „Balken, Rahmen, Bogen“ (ca. 40 Seiten) auf, in dem es um die Bestimmung der Schnittgrößenverläufe von Normalkraft, Querkraft und Biegemoment unter Last geht. In diesem Kapitel spielt es aber eine wesentliche Rolle, was man schon daran erkennt, dass die Begriffe „Sprung“, „Unstetigkeit“ und „stetig“ dort auf 14 Seiten vorkommen. Ein Sprung im Querkraft- bzw. im Momentenverlauf tritt auf, wenn eine punktuelle Einzelkraft bzw. ein Einzelmoment an einer Stelle wirkt, d.h. Sprünge sind zur Modellierung solcher idealisierter Situationen erforderlich. Dies sind aber auch die einzigen Situationen, die von Interesse sind, weswegen alle betrachteten Verlaufsfunktionen stückweise stetig sind. Die aus mathematischer Sicht eingeschränkte Vorstellung von Stetigkeit als Zusammensetzbarkeit von stetigen Stücken ohne Sprung ist also ausreichend, es genügt ein „partielles Grundverständnis“.

Bezüglich der formalen Darstellung ist insbesondere die Angabe des Definitionsbereichs interessant. Ergeben sich Sprünge durch Einwirkung einer Einzelkraft (oder eines Einzelmoments), so wird die Stelle aus dem Definitionsbereich ausgenommen. An diesen Stellen wird von „Unstetigkeiten“ (S.179) gesprochen, obwohl mathematisch gesehen die Funktion stetig ist, da Stetigkeit nur für Stellen im Definitionsbereich definiert ist. So schreibt Heuser beispielsweise zur auf $R\backslash\{0\}$ definierten Funktion $f(x)=1/x$: „… sie ist aber im Punkte 0 nicht unstetig, auch nicht stetig – sondern nur nicht definiert“ (S. 213). In einer alternativen Darstellung arbeiten Gross et al. (2013) mit verschiedenen Funktionen pro Teilintervall (genannt „Feld“), etwa $Q_I(x)$ und $Q_{II}(x)$ für die Querkraft, wobei die Ränder explizit ausgenommen sind. Zur Formulierung von Übergangsbedingungen werden dann aber diese Einzelfunktionen an den Rändern ausgewertet, etwa in der Form $Q_I(a)= Q_{II}(a)-F$

bei Einleitung einer Einzelkraft. Mathematisch exakt müsste hier mit einseitigen Grenzwerten gearbeitet werden. Stattdessen werden in weiteren Beispielen Formulierungen verwendet wie „Schneiden bei x=a unmittelbar vor dem Angriffspunkt der Kraft F“ (S. 203).

Um bei mehreren Belastungen nicht Felder mit entsprechend vielen Übergangsbedingungen bilden zu müssen, wird in der Mechanik das so genannte Föppl-Symbol $<x-a>^n= 0$ für $x<a$ und $(x-a)^n$ für $x>a$ verwendet. Da beim Föppl-Symbol die Zusammensetzstelle a aus dem Definitionsbereich ausgenommen ist, wäre selbst bei stetigem Übergang die Stelle nicht definiert, während dies beim früheren Vorgehen der Fall war (S. 181 für das Moment).

Für den Ingenieur scheinen diese Inkonsistenzen aber unerheblich zu sein, da Punkte ohnehin nur Idealisierungen sind und das Wesentliche in der „momentanen“ Veränderung besteht. Es stellt sich daher die Frage, in welchen Nutzungszusammenhängen denn die Punkte an den Zusammensetzstellen eine Rolle spielen. Will man z. B. den Querkraftverlauf bei mehreren Feldern aufstellen, so muss man Übergangsbedingungen formulieren. Dazu muss man wissen, ob diese Bedingungen als Gleichheit der zusammentreffenden Funktionsstücke zu formulieren sind oder ob noch ein Kraftversatz bei punktueller Einleitung hinzukommt (S. 193). Auch bei der zeichnerischen Ermittlung, bei der man Zusammensetzpunkte bestimmt und dann aus den Zusammenhängen zwischen Streckenlast, Querkraft und Moment den Verlauf skizziert, muss man wissen, ob man an einer Zusammensetzstelle zwei Punkte oder einen zu berechnen hat. Die Ermittlung der Verläufe wird benötigt, um das absolute (Betrags-)Maximum insbesondere im Biegemomentenverlauf zu ermitteln. Dazu muss man insbesondere die Sprünge exakt erfassen, da das gesuchte Maximum auch an einer Sprungstelle liegen kann (S. 187).

Literatur

Alpers, B. (2017). Differences between the usage of mathematical concepts in engineering statics and engineering mathematics education, R. Göller,R. Biehler, R. Hochmuth, & H.-G. Rück (Eds.). *Didactics of Mathematics in Higher Education as a Scientific Discipline – Conf. Proc. Khdm-Report 17-05* (pp.137-141). Kassel: Universität Kassel

Courant, R. & Robbins, H. (2010). Was ist Mathematik? 5. Auflage, Berlin-Heidelberg: Springer

Goold, E. & Devitt, F. (2012). Engineers and Mathematics. The Role of Mathematics in Engineering Practice and in the Formation of Engineers, Saarbrücken: Lambert Academic Publishing

Gross, D. et al. (2013). Technische Mechanik 1. Statik. 12. Auflage, Berlin-Heidelberg: Springer Vieweg

Heuser, H. (2009). Lehrbuch der Analysis, Teil 1, 17. Auflage, Wiesbaden: Vieweg+ Teubner