Gabriella AMBRUS, Budapest

Rückwärtsarbeiten mit Lehramtsstudierenden – Problemlösen lernen in der Lehrerausbildung und in der Schule

„There is certain psychological difficulty in turning around, in going away from the goal, in working backwards, in not following the direct path to the desired end…There is some sort of psychological repugnance to this reverse order which may prevent a quite able student from understanding the method if it is not presented carefully.” (Pólya, 1973, 230)

Das Rückwärtsarbeiten bedeutet aber nicht, dass es eine mühsame Tätigkeit ist und herausragender Ideen bedarf. Es gibt sogar solche Aufgaben, bei denen die Vorgehensweise Rückwärtsarbeiten ganz selbstverständlich ist.

1. Theoretischer Hintergrund

Bei Bruder & Collet (2011) zählt das Rückwärtsarbeiten zu den wichtigen heuristischen Strategien, die in der Schule zu unterrichten sind. Rückwärtsarbeiten wird als heuristische „Unter-Strategie“ bei der Strategie „*Reduktion*“ angeführt. Weitere Strategien sind: *Induktion, Variation, und Interpretation*. Die Strategie Rückwärtsarbeiten steht in engem Zusammenhang mit dem Vorwärtsarbeiten. Einerseits ergibt sich das bei der Angabe des eigentlichen Lösungswegs, wenn dieser schon rückwärts geplant bzw. skizziert wird. Andererseits kann eine Kombination von Vorwärts- und Rückwärtsarbeiten als Strategie bei einem Problemlöseprozess hilfreich sein (Kombinierte Strategie aus Vorwärts- und Rückwärtsarbeiten, Rott, 2013, 78).

Es können zwei Arten (Typen) von Aufgaben unterschieden werden, bei denen das Rückwärtsarbeiten zur Lösung führen kann: (1) Das Verfahren ist angegeben; aus dem Endzustand ist, diesem Verfahren folgend, der Anfangszustand (wonach gefragt ist) leicht anzugeben (**Typ 1**).

Beispiel: *Wir hatten einige Knödel. Zuerst haben wir die Hälfte gegessen und noch einen Knödel, danach die Hälfte der restlichen Knödel und noch einen Knödel. Es blieben 12 Knödel übrig. Wie viele Knödel hatten wir?*

(2) Zur Lösung wird nach einem Verfahren gesucht – mit der Analyse des Endzustandes (**Typ 2**).

Beispiel: *Wie kannst du genau 56 Liter Wasser aus dem Fluss holen, wenn du nur einen 4 l Topf und einen 9 l Topf hast?* (Pólya, 1973, 227)

Weitere Beispiele zum Typ 2 sind die Pappos-Vieta-Methode (Winter, 1991), der indirekte Beweis (Grieser, 2013), Konstruktionsaufgaben in der Geometrie (Winter, 1991, Pólya, 1973) und Gleichungen (Winter, 1991).

In Fachgruppe Didaktik der Mathematik der Universität Paderborn (Hrsg.)
Beiträge zum Mathematikunterricht 2018. Münster: WTM-Verlag

Ein explizites Heurismentraining kann in der Schulung von Problemlösen effektiver sein als ein implizites. Dies ergab sich aus einer Studie mit Lehramtsstudierenden von Rott und Gawlick (2014), bei der eine Untersuchung von Schoenfeld (1985) in etwas veränderter und ergänzter Form wiederholt wurde, sowie in der Untersuchung bei Gymnasiasten von Brockmann-Behnsen & Rott (2017). Für die Methode [Komplexer Mathematikunterricht von Tamás Varga, (darüber mehr: Szendrei, 2007; Ambrus &Vancsó. 2017)] hielten die Leiter dieses Versuches es für am wichtigsten, *dass die Kinder von Anfang an zum selbstständigen Problemlösen erzogen wurden* (Klein, 1980, 34, Übersetzung AG). Problemlösen zu lehren ist ein besonderer Bestandteil der ungarischen Unterrichtstradition (Ambrus A. & Hortobágyi, 2001; Szendrei 2005, 2007; Vásárhelyi & Zimmermann, 2010).

2. Forschungsinteresse und methodisches Vorgehen

Für künftige Lehrkräfte ist es besonders wichtig, Kenntnisse über Problemlösen durch erlebte, strukturierte Erfahrungen zu erwerben (Grieser, 2013). Während der Einstiegsphase des Mathematikstudiums hilft Lehramtsstudierenden das auf Problemlösestrategien basierende Drei-Phasen-Modell von Grieser (2013) zum eigenen Problemlösen und Beweisen. Lehramtsstudierende zeigen ein vielfältiges Bild bezüglich ihrer Problemlösefähigkeiten. So ist es einerseits wichtig, Fähigkeiten selbst zu entwickeln, andererseits sollte man ihnen Methoden zeigen, die sie in ihrer Praxis verwenden können. Beispielsweise können eine methodisch aufgebaute Struktur bzw. mögliche Hilfestellungen (Ambrus G., Rott, 2017) nicht nur zur Entwicklung der eigenen Problemlösefähigkeiten von Lehramtsstudierenden beitragen, sondern auch als Musterbeispiele für den Unterricht dienen.

Das Ziel der nachstehend beschriebenen Untersuchung, die Teil der Arbeit einer Forschungsgruppe ist (einige Ergebnisse siehe: Kónya, E. & Kovács, Z. (2017)), besteht darin, die Vorgehensweisen von Lehramtsstudierenden zu erfassen. Inwieweit erkennen und verwenden sie die Methode Rückwärtsarbeiten bei solchen Aufgaben, bei denen ein Verfahren angegeben ist und die Methode als eine Alternative zum Lösen mit Gleichung erscheint (Typ 1, siehe vorher)? Über welche Basiskenntnisse verfügen sie? An der Untersuchung haben 15 Lehramtsstudierende der ELTE Budapest teilgenommen.

Die Studierenden haben zuerst drei Aufgaben (1. Schnuraufgabe, 2. Knödelaufgabe (siehe vorher), 3. Prozentaufgabe) auf einem Blatt zur selbständigen Arbeit erhalten. Sie konnten anonym arbeiten. Sie sollten die Aufgaben schriftlich lösen und hatten keinen Zeitdruck. Sie brauchten etwa10 Minuten zur Anfertigung ihrer Lösungen.

Hier werden noch die erste und die dritte Aufgabe zitiert:

1. *Ein Drittel einer Schnur wird abgeschnitten, danach noch ein Meter. Es sind 5 Meter geblieben, wie lang war ursprünglich die Schnur?* (Eglesz, Kovács & Sztrókayné, (Lehrbuchserie nach T. Varga Methode), 1983).

3. *In der ersten Runde eines Mathematik-Wettbewerbs sind 95% ausgeschieden. In der dritten Runde konnten 2% der Teilnehmer der zweiten Runde teilnehmen. In der dritten Runde haben 23 teilgenommen, wie viele Schüler gab es in der ersten und zweiten Runde?* (Imrecze, Kovács, Szeredi & Földvári: (Lehrbuchserie nach T. Varga Methode) Matematika 8. 1981).

Nach der Besprechung war es „Hausaufgabe" (für Bonuspunkte), drei Aufgaben mit Lösungen aufzuschreiben, die sich der eigenen Meinung nach mit der Methode Rückwärtsarbeiten lösen lassen.

3. Ergebnisse

Erfahrungen mit der Schnuraufgabe (1.): Von den 15 Lehramtsstudierenden haben 9 die Aufgabe unter Verwendung einer Gleichung gelöst, 6 Studierende wählten das Rückwärtsarbeiten (in einem Fall mit beiden Methoden).

Erfahrungen mit der Knödelaufgabe (2.): 12 haben die Aufgabe nur mit einer Gleichung gelöst, 3 Studierende mit Gleichung und Rückwärtsarbeiten.

Erfahrungen mit der Prozentrechnungsaufgabe (3.): Insgesamt 8 Studierende wählten das Rückwärtsarbeiten, in einer Lösung wurde eine „Mischung" von beiden Methoden angegeben. Es gab 6 Lösungen mit Gleichung. Eine Person hat zwei verschiedene Lösungswege angegeben.

Nach der gemeinsamen Besprechung wurde auf die Frage „Welche Strategien haben sie bei der Lösung erkannt?" nur das Rückwärtsarbeiten erwähnt, andere (z.B. Zeichnungen erstellen) nicht. Auf die weitere Frage „In welcher Schulstufe würden sie mit solchen Aufgaben arbeiten?" meinte eine Person: nur „in den Klassen 5. und 6, aber ohne Gleichung. Einige Studierende würden diese Aufgaben erst ohne Gleichung, später, also in höheren Klassen nochmal mit Gleichung lösen. Andere Studierende waren der Meinung, dass man solche Aufgaben in der Klasse 12 unbedingt lösen soll, „da in dieser Schulstufe viele Schülerinnen und Schüler sich nicht mehr erinnern können, wie solche Aufgaben zu lösen sind".

Für die folgende Seminarveranstaltung haben 9 Studierende die „Hausaufgabe" angefertigt und angegeben, manche haben sogar vier Aufgaben geschrieben. Unter den Aufgaben erschienen folgende Kategorien (die Zahlen in Klammern geben die Anzahl je Aufgabentyp an): einfache Aufgaben, wie z.B. die Schnuraufgabe (18), mehrschrittige Aufgaben, bei denen eine Lösung mit Gleichung oder Gleichungssystem komplizierter wäre (6), Analyse des Endzustands (4), Gleichung (1), andere (1).

4. Diskussion

Das Rückwärtsarbeiten wird als alternative Lösungsmethode bei solchen Aufgaben genutzt, bei denen auch Gleichungen verwendbar sind. Auffällig sind die vielen Lösungen mit Rückwärtsarbeiten bei der Prozentaufgabe – was auch mit dem vorangegangenen didaktischen Studium über Prozentrechnung zusammenhängen kann. Obwohl das Rückwärtsarbeiten an einfachen Beispielen eingeführt wurde, erscheinen bei den Aufgaben, die von den Studierenden erstellt wurden (Hausaufgabe), auch Aufgaben des Typs 2, bei denen diese Methode mit der Analyse des Endzustands zu verwenden ist. Erwähnenswert ist noch die Vielfalt an verschiedenen Inhalten und Themen, obwohl die Gruppe nur geringe Vorerfahrungen zum Problemlösen hatte.

This study was funded by the Content Pedagogy Research Program of the Hungarian Academy of Sciences.

Literatur

Ambrus, A. & Hortobágyi, I. (2001). Einige Tendenzen im problemlösenden Mathematikunterricht in Ungarn, *Der Mathematikunterricht*, 6, Friedrich Verlag.

Ambrus, G. & Vancsó, Ö. (2017). Der komplexe Mathematikunterricht von Tamás Varga im 21. Jahrhundert – Förderung des mathematischen Denkens nach neuesten Forschungsergebnissen, *Mitteilungen der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik*, 103, 6–12.

Ambrus, G. & Rott, B. (2017). Hilfestellungen beim Problemlösen in Form von „Lösungsbildern". mathematica didactica 40.

Brockmann-Behnsen, D. & Rott, B. (2017). Probleme durch ein systematisches explizites Training erfolgreicher lösen – quantitative Ergebnisse der Langzeitstudie HeuRekAP. mathematica didactica 40.

Bruder, R. & Collet, Ch. (2011). Problemlösen lernen im Mathematikunterricht. Cornelsen.

Eglesz, Kovács & Sztrókayné (1983). *Matematika 6.*, 178, 60. Tankönyvkiadó, Budapest.

Grieser, D. (2013). *Mathematisches Problemlösen und Beweisen*, Springer.

Kónya, E. & Kovács, Z. (2017). Can teacher trainees use inductive arguments during their problem solving activity? In. Dooley, T. & Gueudet, G. (Eds.) *Proceedings of the Tenth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (CERME 10, 2017). Dublin, Ireland: DCU Institute of Education and ERME.

Polya, G. (1973). *How to solve it?* Princeton University Press.

Rott, B. & Gawlick, T. (2014). Explizites oder implizites Heurismentraining – was ist besser? *mathematica didactica* 37, 191–212.

Szendrei, J. (2007). When the going gets tough, the tough gets going problem solving in Hungary, 1970–2007: research and theory, practice and politics, *ZDM* 39:443–458.

Vásárhelyi, É. & Zimmermann, B. (2010). György Pólya (1887–1985) – zum Menschen, Mathematiker und Mathematikdidaktiker, *Der Mathematikunterricht*, Jg.56, 2, 4 –12.

Winter, H. (1991). *Entdeckendes Lernen*, Vieweg.