

Daniela AßMUS, Torsten FRITZLAR, Halle an der Saale &  
Frank FÖRSTER, Braunschweig

## **Ähnlichkeiten und Analogien zwischen mathematischen Problemstellungen aus Schülersicht**

In der Mathematik als Strukturwissenschaft (C. F. v. Weizsäcker) kommt Analogien eine herausragende Bedeutung zu. Damit zusammenhängend gilt das Konstruieren und Nutzen von Analogien beim mathematischen Problemlösen als wichtiger heuristischer Ansatz (z. B. Pólya, 1954). In zahlreichen psychologischen und mathematikdidaktischen Untersuchungen wurde aber auch dessen besondere Ansprüchlichkeit nachgewiesen. So deutet eine von Novick (1988) durchgeführte Studie mit 60 Studierenden auf einen Zusammenhang zwischen Problemlöseexpertise und erfolgreichem Transfer hin, zeigt gleichzeitig jedoch selbst in der Expertengruppe Schwierigkeiten bei der Identifizierung geeigneter Gemeinsamkeiten mathematischer Problemstellungen auf. Zu ähnlichen Ergebnissen kommt McVey (1993), die Transferleistungen beim Bearbeiten mathematischer Probleme mit 13- bis 14-jährigen mathematisch begabten und hochbegabten Schülerinnen und Schülern untersuchte, während ältere durchschnittlich und überdurchschnittlich leistungsstarke Lernende als Vergleichsgruppe dienten. Für das Grundschulalter zeigen beispielsweise die Studien von Aßmus und Förster (2013), dass auch für mathematisch begabte Dritt- und Viertklässler das Konstruieren und Nutzen von Analogien bei mathematisch reichhaltigeren Problemen sehr anspruchsvoll ist.

Die Studienergebnisse weisen ferner darauf hin, dass Transferprozesse durch verschiedenartige Ähnlichkeiten zwischen mathematischen Problemen initiiert werden können. Neben strukturellen scheinen vor allem oberflächliche Ähnlichkeiten entscheidend zu sein. So deutet sich an, dass letztere häufig zu negativem Transfer (ver-)führen, gelegentlich beim Problembearbeiter aber auch weitergehende Suchprozesse auslösen können. Allerdings wurde in den meisten der beschriebenen Studien der Einfluss von Ähnlichkeiten zwischen Problemstellungen auf Bearbeitungsprozesse lediglich implizit aus der Bearbeitung des Zielproblems erschlossen. Es lassen sich somit nur Vermutungen darüber anstellen, anhand welcher Merkmale (vermeintliche) Ähnlichkeiten konstruiert und positive bzw. negative Transferprozesse ausgelöst wurden. Das nachfolgend beschriebene Forschungsanliegen hat sich daher zum Ziel gesetzt, explizit in den Blick zu nehmen, *anhand welcher Merkmale Grundschul Kinder mathematische Aufgaben bzw. Probleme als ähnlich ansehen.*

## **Zielsetzungen und Forschungsfragen**

Die Studie widmet sich dem Ziel, Konzepte von Ähnlichkeit zwischen mathematischen Aufgaben bei Grundschulkindern zu beschreiben. Dabei stehen folgende Forschungsfragen im Fokus:

- Auf Grundlage welcher Kriterien schätzen Grundschul Kinder mathematische Aufgaben als ähnlich ein?
- Auf Grundlage welcher Kriterien schätzen Grundschul Kinder mathematische Aufgaben als ähnlich bearbeitbar ein?
- Auf Grundlage welcher Kriterien konstruieren Grundschul Kinder ähnliche Aufgaben?

## **Studiendesign**

In halbstandardisierten Leitfadeninterviews bearbeiteten die Kinder zunächst eine Quellaufgabe (Q) und erläuterten ihr Vorgehen, bevor ihnen drei weitere Aufgaben vorgelegt wurden. Diese stimmten jeweils in genau einem der Merkmale „Kontext“ (Aufgabe A), „mathematische Struktur“ (Aufgabe B) oder „Zahlen und Reihenfolge der Zahlen“ (Aufgabe C) mit Q überein. Nach dem Lesen der Aufgaben sollten die Kinder einschätzen, welche der Aufgaben zu Q ähnlich sind und die Ähnlichkeiten ggf. benennen. Im Anschluss waren die Aufgaben hinsichtlich ihres Ähnlichkeitsgrades zu Q zu ordnen. Daraufhin wurden die Vorgehensweisen bei der Bearbeitung der Aufgaben in den Mittelpunkt der Betrachtung gestellt, indem die Kinder diejenige Aufgabe unter A, B und C auswählen sollten, die sich ähnlich zu Q bearbeiten lässt. Nach der Bearbeitung der ausgewählten Aufgabe wurden die Kinder schließlich angehalten, eine eigene Aufgabe zu konstruieren, die sich ähnlich zu Q bearbeiten lässt.

Bislang wurden in Halle an der Saale 50 Interviews mit Dritt- bis Sechstklässlern durchgeführt. Es kamen vier verschiedene Aufgabensets (Q+ABC) zum Einsatz, von denen jedes teilnehmende Kind eines bearbeitete. Alle Interviews wurden videografiert und transkribiert. Neben einer quantitativen Erfassung der Schülerentscheidungen sollte vor allem durch eine qualitativ-interpretative Analyse der Interviews erschlossen werden, welche Kriterien die Kinder für ihre Ähnlichkeitsurteile heranziehen.

## **Ergebnisse**

In der Untersuchungsgruppe zeigte sich hinsichtlich der von den Kindern genannten Ähnlichkeiten zwischen den Aufgaben eine große Vielfalt. Erwartungsgemäß fanden sich Äußerungen zu Oberflächenähnlichkeiten wie Objekten (Namen, Begriffe, Orte), Handlungen, Zahlenwerten sowie zu

Merkmale, die sich stärker auf zugrunde liegende Strukturen bezogen, wie gegebenen oder gesuchten Werten, Fragestellungen oder anwendbaren Vorgehensweisen. Darüber hinaus äußerten sich einige Kinder jedoch auch zu Ähnlichkeiten, die bei der Aufgabenkonzeption so nicht intendiert waren. Dies waren vorwiegend inhaltliche Verknüpfungen wie z. B. „Überall etwas Schönes“, „Alle spielen mit“. Unterschiede zeigten sich auch hinsichtlich der Anzahl und der Unterschiedlichkeit der geäußerten Merkmale. Während einige Kinder für jede Aufgabe nahezu alle bei der Aufgabenkonzeption berücksichtigten Ähnlichkeiten nannten, fokussierten andere Kinder über alle Aufgaben hinweg auf gleichartige Kriterien.

Anhand der vorliegenden Daten ließen sich bislang drei verschiedene Ähnlichkeitskonzepte rekonstruieren: erwartungsgemäß ein strukturorientiertes und ein oberflächenorientiertes, aber auch ein variantes Ähnlichkeitskonzept. Das *strukturorientierte* Ähnlichkeitskonzept zeichnet sich durch sofortige Identifizierung und Benennung von (wesentlichen) strukturellen Gemeinsamkeiten zwischen Q und B aus. Diese werden zu allen Zeitpunkten des Interviews von den Nutzern dieses Konzepts als wichtigste (zum Teil einzig relevante) Ähnlichkeitsmerkmale angesehen. Meist verwenden diese Kinder bei der Bearbeitung von Q und B gleiche Bearbeitungswege oder äußern explizit, dass gleiche Bearbeitungswege möglich wären. Die selbst konstruierten Aufgaben sind meist analog zu Q oder weisen zumindest sehr große Ähnlichkeiten auf.

Ein *oberflächenorientiertes* Ähnlichkeitskonzept zeigt sich darin, dass sich ein Kind zu keinem Zeitpunkt des Interviews für B als ähnlich(st)e oder ähnlich zu bearbeitende Aufgabe entscheidet. Dies schließt nicht aus, dass (auf Nachfrage) strukturelle Gemeinsamkeiten von Q und B genannt werden, für die Bewertung von Ähnlichkeit scheinen diese jedoch keine Rolle zu spielen. Da die Schülerinnen und Schüler sich bei der Bearbeitung für eine nicht-strukturgleiche Aufgabe entscheiden, differieren erwartungsgemäß auch die Bearbeitungswege. Teilweise ist jedoch ein negativer Transfer zu beobachten, bei dem in die gewählte Aufgabe strukturelle Gemeinsamkeiten zu Q hineingedeutet werden und eine zu Q ähnliche, hier fehlerhafte Bearbeitung erfolgt. In anderen Fällen werden von den Kindern Gemeinsamkeiten ihrer Bearbeitungswege benannt, die sich vorwiegend auf grobe Ähnlichkeiten beziehen („bei beiden plus“) oder allgemeine Bearbeitungsmittel betreffen (Skizze, Tabelle). Die selbst konstruierten Aufgaben weisen größtenteils nur geringe Ähnlichkeiten zu Q auf. Häufig sind die Angaben in den Aufgaben unvollständig.

Von einem *varianten* Ähnlichkeitskonzept sprechen wir dann, wenn die Kinder zwischen „ähnlicher Aufgabe“ und „ähnlich zu bearbeitender Auf-

gabe“ konfliktfrei unterscheiden. Dabei wird die Ähnlichkeit von Aufgaben zumeist anhand von Oberflächenmerkmalen entschieden. Diese treten für die Einschätzung von ähnlich zu bearbeitenden Aufgaben in den Hintergrund und stattdessen werden strukturelle Merkmale oder Ähnlichkeiten im Bearbeitungsweg als für den Vergleich wesentlich angesehen. Selbst konstruierte Aufgaben sind zur Quellaufgabe analog oder ähnlich.

## Folgerungen

Im Rahmen der vorliegenden Studie konnten unterschiedliche Ähnlichkeitskonzepte herausgearbeitet werden. Für den Mathematikunterricht sehen wir dabei die folgenden methodisch-didaktischen Konsequenzen:

Prinzipiell ist das strukturorientierte Konzept wünschenswert, da es Schülerinnen und Schüler damit sehr schnell gelingt, strukturelle Gemeinsamkeiten zwischen mathematischen Aufgaben zu erkennen und für die Bearbeitung oder Entwicklung eigener Aufgaben zu nutzen.

Die Existenz eines varianten Ähnlichkeitskonzepts, in dem zwischen ähnlichen und ähnlich zu bearbeitenden Aufgaben konfliktfrei unterschieden wird, weist auf die Bedeutung von Aushandlungs- bzw. Verständigungsprozessen für mathematisches Tätigsein hin. Für den Mathematikunterricht erscheint es deshalb wichtig, die heuristische Nutzbarkeit von Aufgabenähnlichkeiten ausführlich bzw. deutlich zu thematisieren.

Das oberflächenorientierte Ähnlichkeitskonzept kann insofern als problematisch angesehen werden, als dass sowohl das Analogisieren als heuristischer Ansatz von Lernenden als auch das Einsetzen von Analogien als didaktische Methode von Lehrenden wenig Aussicht auf Erfolg haben, wenn Schülerinnen und Schüler vorrangig auf Oberflächenmerkmale fokussieren. An dieser Stelle scheinen didaktische Interventionen notwendig.

## Literatur

- Abmus, D., & Förster, F. (2013). ViStAD – Erste Ergebnisse einer Video-Studie zum analogen Denken bei mathematisch begabten Grundschulkindern. *mathematica didactica*, 36, 45–65.
- McVey, M. D. (1993). *Analogical Transfer: Are There Performance Differences among High-Ability Students?* Paper presented at the Annual Meeting of the American Educational Research Association, Atlanta. Online verfügbar unter <http://files.eric.ed.gov/fulltext/ED367692.pdf> [24.04.2018].
- Novick, L. R. (1988). Analogical Transfer, Problem Similarity, and Expertise. *Journal of Experimental Psychology: Learning, Memory, and Cognition*, 14(3), 510–520.
- Pólya, G. (1954). *Mathematics and Plausible Reasoning: Vol I: Induction and Analogy in Mathematics*. Princeton, NJ: Princeton University Press.