Dilan BACARU, Reinhard OLDENBURG &
Adrian SCHLOTTERER, Augsburg

Mathematik als dynamische Wissenschaft erleben – ein Seminar für Lehramtsstudierende

Mathematik ist eine dynamische Wissenschaft mit eigenen Forschungsmethoden. Fachwissenschaftsstudenten erleben das spätestens dann, wenn sie selbst Mathematik treiben. Lehramtsstudierende dagegen haben oft weniger Gelegenheit, diese Seite der Mathematik zu entdecken. In einem Ergänzungsseminar zur Analysis I geben wir eine Möglichkeit zu erleben, wie Mathematik entsteht, und warum sie ein so eigenständiger Bereich des Denkens ist. Im Artikel werden die Ideen dazu vorgestellt und anhand einiger Dokumente erläutert, wie das funktioniert.

1. Ziele

Ziel unseres Seminars ist das grundlegende Verständnis der inneren Logik der Mathematik. Hierbei soll die Mathematik als dynamische Wissenschaft erlebt und ihre Prozesse verstanden werden und die Verzahnung von Schul- und Hochschulmathematik soll zur Sinnstiftung und Motivation in der gymnasialen Studieneingangsphase beitragen. Die erworbenen Kompetenzen sollten die angehenden Lehrkräfte in die Lage versetzen, Schulbücher kritisch zu lesen und Schülerargumente zu verstehen und schnell auf ihre Gültigkeit hin zu beurteilen.

2. Begriffsbildung am Beispiel Viereck

Es ist eine große Kluft zwischen schulischer und universitärer Begriffsbildung zu beobachten. Diese Diskontinuität sollte vermindert werden. Beide Bereiche sollten mehr prozesshaft arbeiten, d.h. gemäß Exploration, Exaktifizierung und Finalisierung. Dabei muss der Sinn von Formalisierung für Lehramtsstudierende stets erlebbar werden, so dass diese Erfahrung prägend für ihre spätere Lehrtätigkeit wird.

Um die Relevanz präziser Definitionen erlebbar zu machen, diente der folgende allererste Arbeitsauftrag im Seminar: „Definieren Sie, was ein Viereck ist, d.h. geben Sie eine möglichst präzise und knappe Beschreibung.“ Dieser Auftrag wurde schon verwendet in EnProMa (Oldenburg & Weygandt 2015).

Studentische Definitionen wiesen vielerlei Mängel auf. Sie waren entweder nicht ausreichend (Bsp.: „vier Punkte durch vier Kanten verbunden“) oder nicht minimal (vgl. Abbildung 1). Außerdem wurden unnötige Einschränkungen (Bsp.: „zwei parallele Geraden“ oder „alle Winkel kleiner 180°“)

getroffen. Die Definition in Abbildung 1 ist ein Beispiel für solch eine studentische Definition. Dort wurde der Begriff Viereck mit Hilfe des Begriffs „Abbildung“ erklärt, wobei dieser aus der Alltagssprache entnommen ist und hier nicht im mathematischen Kontext gebraucht wird. Zudem wird die „Winkelsumme“ der Vierecke mit in die Definition aufgenommen. Dem Studenten ist nicht bewusst, dass die Innenwinkelsumme erst als Satz aus den Eigenschaften des Vierecks folgt.

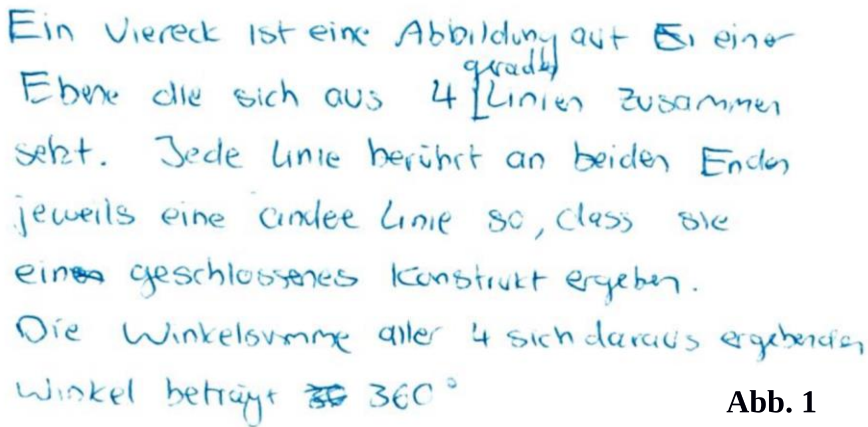

Ein Viereck ist eine Abbildung auf ~~Ei~~ einer Ebene die sich aus 4 gerade Linien zusammen setzt. Jede Linie berührt an beiden Enden jeweils eine andee Linie so, dass sie ein~~es~~ geschlossenes Konstrukt ergeben.
Die Winkelsumme aller 4 sich daraus ergebenden Winkel beträgt ~~36~~ 360°

Abb. 1

Sehr viele der studentischen Definitionen erlaubten überschlagene Vierecke (d.h. mit zwei sich schneidenden Seiten). Die Erkenntnis, dass für solche Vierecke der Satz von der Innenwinkelsumme nicht gilt, macht das Wechselspiel zwischen Definition und Satz deutlich. Es wird klar, dass es verschiedene Definitionen geben kann, dass aber in Abhängigkeit davon die Theorie (d.h. die Sätze) etwas anders ausfällt. Im Seminar führte das zu vielen lebhaften Diskussionen (u.a. auch über die Frage von „Vierecken“ mit drei kollinearen Punkten).

Ein weiteres vorläufiges Ergebnis: Realschüler der 9. Jahrgangsstufe definieren nur minimal ungenauer. Im Bereich der Begriffsbildung scheinen die untersuchten Erstsemester also in der Oberstufe stagniert zu haben.

Begriffsbildung ist Modellieren

Unsere Perspektive auf Begriffsbildung ist analog zu der des Modellierens. Informelle und intuitive Konzepte (etwa zur Krümmung, oder zu Funktionen mit genau einem Maximum) werden in einer Art Modellierungskreislauf (s. Abbildung 2) formalisiert, um sie logischer Analyse zugänglich zu machen. Die Konsequenzen können dann in einer Art Validierung mit den ursprünglichen Konzepten verglichen werden.

Bei allen Begriffen und Begriffsvariationen, die wir verwenden, soll den Studierenden ermöglicht werden, selbst-entdeckend und authentisch forschend zu arbeiten.

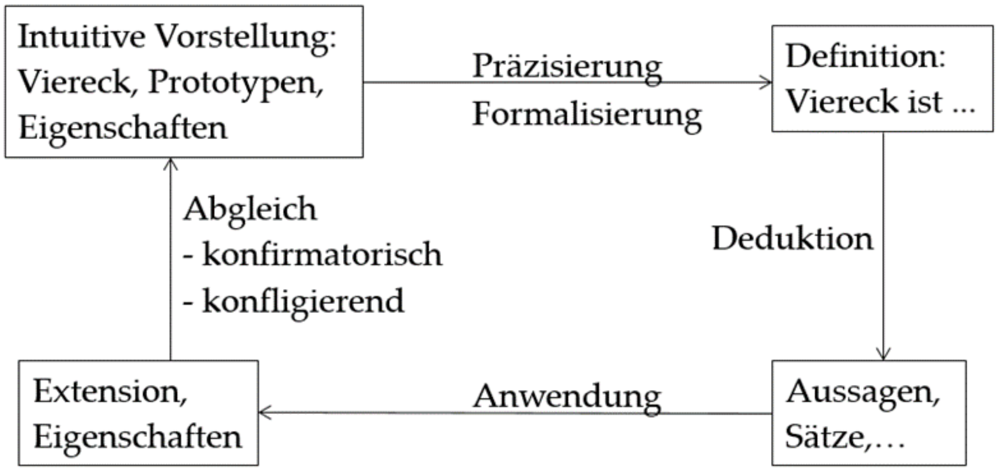
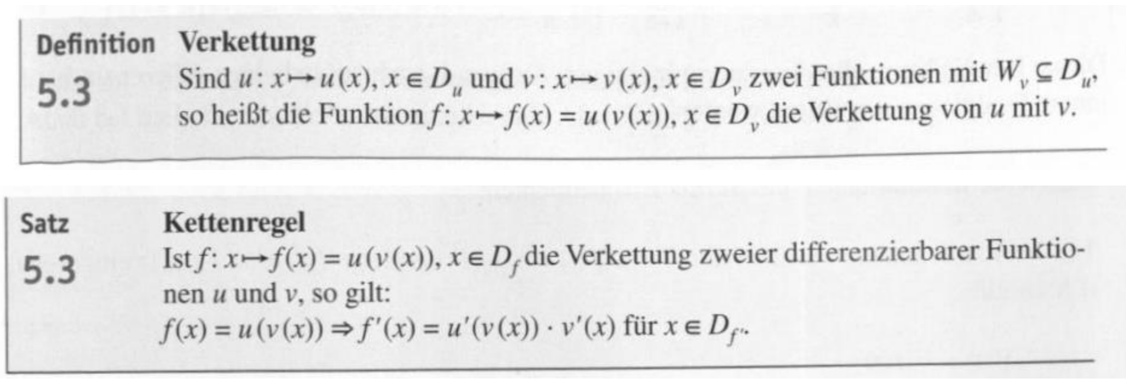


Abb. 2

3. Kritische Reflexion von Schulbüchern

Die Frage, wozu der hohe Anteil an Fachwissenschaft im Lehramtsstudium dient, wird von Studierenden immer wieder gestellt. Eine mögliche Antwort ist, die Studierenden erleben zu lassen, dass Schulbücher fachlich kompetent interpretiert werden müssen. Abb. 3 (unten) zeigt ein Beispiel.



Definition 5.3 **Verkettung**
Sind $u: x \mapsto u(x), x \in D_u$ und $v: x \mapsto v(x), x \in D_v$ zwei Funktionen mit $W_v \subseteq D_u$, so heißt die Funktion $f: x \mapsto f(x) = u(v(x)), x \in D_v$ die Verkettung von u mit v.

Satz 5.3 **Kettenregel**
Ist $f: x \mapsto f(x) = u(v(x)), x \in D_f$ die Verkettung zweier differenzierbarer Funktionen u und v, so gilt:
$f(x) = u(v(x)) \Rightarrow f'(x) = u'(v(x)) \cdot v'(x)$ für $x \in D_{f'}$.

Abb 3: Verkettung und Kettenregel aus Fokus, Q 11 (Cornelsen Verlag)

Die intendierte Einsicht bei den Studierenden sollte sein, dass die obige Definition evtl. zu einschränkend ist. Dies wird sichtbar an folgendem Beispiel: Sei $u(x)=1/x$, $v(x)=x^2$ wobei $D_u=\mathbb{R}\backslash\{0\}$ maximal, aber $W_v=\mathbb{R}^+$.

In diesem Beispiel ist W_v nicht Teilmenge von D_u. Also ist die Verkettung hier nicht definiert! Der Verbesserungsvorschlag von den Studierenden sollte lauten: „Man könnte definieren, dass die Definitionsmenge der Komposition die Teilmenge von D_v ist, für die u dann anwendbar ist.“

Analog zeigt das zweite Beispiel aus Abb. 3 eine eingeschränkte Fassung der Kettenregel, in der die Aussage, dass die Verkettung differenzierbarer Funktionen differenzierbar ist, ausgelassen wird, indem die Gültigkeit der Regel auf den Fall eingeschränkt wird, dass die Stelle in der Definitionsmenge der Ableitung der Verkettung liegt.

4. Beobachtungen

Wie bereits in Abschnitt 2 gesehen, sind studentische Definitionen von gymnasialen Lehramtsstudierenden im ersten Semester unsauber. Sie haben dabei die Konsequenzen verschiedener Definitionen nicht im Blick und sind sich dessen nicht bewusst, dass abhängig von Definitionen bestimmte Sätze folgen.

Durch die kritische Reflexion von Schulbüchern konnte der Blick für fehlerhafte Definitionen bzw. Ungenauigkeiten geschärft werden. Folglich waren die Studierenden erstaunt über die Wichtigkeit universitären Fachwissens als vertieftes Hintergrundwissen für das Lösen und Verstehen von Inhalten und Aufgaben in Schulbüchern (vgl. Abbildung 3).

Mit weiteren fachlichen Inhalten, wie beispielsweise der Äquivalenz von Ableitungsdefinitionen, konnte festgestellt werden, dass Studierende die Komplexität von möglichen SuS-Beiträgen im späteren Mathematikunterricht unterschätzen.

Der ständige Bezug zur Schulmathematik und die gleichzeitige Nähe zur Grundvorlesung Analysis 1 wurden bei den Studierenden als sinnstiftend und motivierend empfunden.

5. Evaluation

Es wurde ein Pre- und Posttest zu Prozess- und Kreativitätsbezogenen Beliefs (vgl. B. Weigand) durchgeführt. Dabei ließen sich keine signifikanten Veränderungen feststellen. Beliefs sind generell nicht leicht veränderbar – zumal über die begrenzte Dauer eines Semesters. Außerdem war die Stichprobe klein (N = 25). Das allgemeine Feedback war sehr positiv. Studierende sehen die Nützlichkeit!

Die Vernetzung von Fachwissenschaft und Didaktik soll fortgesetzt werden. Studierende haben Concept-Maps zur Beziehung von Fachwissenschaft und Fachdidaktik angefertigt. Eine Auswertung dazu folgt.

Literatur

Oldenburg, R. & Weygandt, B. (2015). Aspekte des Vereinfachens im Mathematikunterricht. In: Der Mathematikunterricht 61, Heft 4, 87–101.