Thomas BAUER, Marburg & Lisa HEFENDEHL-HEBEKER, Essen

Das gymnasiale Lehramtsstudium – widerstreitende Anforderungen und vermittelnde Ansätze

1. Das gymnasiale Lehramtsstudium – Grundprobleme

Ein klassisches Problem ist die von F. Klein (1908) beklagte „doppelte Diskontinuität", wonach Schulmathematik und Hochschulmathematik von Studierenden als weitgehend disparate Fachkulturen erlebt werden, so dass sich die jeweiligen Wissensbestände nicht gegenseitig stützen können.

Toeplitz (1928) fügt eine Analyse aus der Innensicht der Hochschulmathematik hinzu und diagnostiziert eine mangelnde Ausgewogenheit zwischen „Stoff und Methode". Danach sind universitäre Vorlesungen vorrangig auf den *Stoff* im Sinne einer Vermittlung von Tatsachen fokussiert. Zu kurz kommt dagegen die *Methode*, verstanden als Inbegriff der Prozesse und Normen fachlicher Wissensbildung oder kurz als „Getriebe" des Faches.

Zu diesen Befunden von unverminderter Aktualität gibt es neuere, verfeinernde Erklärungsansätze und darauf bezogene hochschuldidaktische Initiativen. Die folgenden Ausführungen dazu bleiben aus Platzgründen exemplarisch und oft ohne Literaturverweise.

Weitgehend konsensfähig sind mittlerweile *konstruktivistische Lerntheorien*, wonach Lernen nur als aktive Wissenskonstruktion des Subjekts nachhaltig sein kann. Folglich muss die Wirksamkeit einseitiger Belehrung in Frage gestellt und eine ausgewogene Balance zwischen Instruktion und Konstruktion im Ausbildungsbetrieb gefordert werden. Hochschuldidaktische Initiativen zur Umsetzung sind vielfältig und reichen von angeleiteten „Präsenzübungen" bis zum „forschenden Lernen" (siehe dazu Teil 3.).

Semiotische Erkenntnistheorien gehen davon aus, dass sich unser Denken im Umgang mit Zeichen vollzieht. Die Mathematik verfügt über eine eigene Zeichensprache mit einem hohen Grad an Formalisierung und einer großen Informationsdichte, zu deren Verständnis eine eigene Lese- und Interpretationsfähigkeit erforderlich ist. Ansätze, solche Fähigkeiten gezielt zu entwickeln, finden sich bei Dietz (2016) und Hilgert et al. (2015).

Kognitionstheoretisch orientierte Betrachtungsweisen verfolgen die Frage, welche gedanklichen Vollzüge in welcher Komplexität beim Erlernen eines Zusammenhanges erforderlich sind. Besondere kognitive Anforderungen stellen mathematische Begriffsbildungen, in denen gedachte Operationen oder Erzeugungsprozesse zu Objekten verdichtet werden, wie z. B. bei Termen, Funktionen, Vektoren und Äquivalenzklassen (Sfard 1995). Für Freudenthal besteht mathematische Wissensbildung in einem fortlaufenden

In Fachgruppe Didaktik der Mathematik der Universität Paderborn (Hrsg.)
Beiträge zum Mathematikunterricht 2018. Münster: WTM-Verlag

Ordnen von Erfahrungsfeldern, das mit konkret-gegenständlichen Erfahrungen beginnt und sich schrittweise in gestufte Bereiche der mentalen Welt weiter entwickelt. Diskontinuitäten in Lernbiographien entstehen, wenn (zu viele) natürliche Lernstufen übersprungen werden müssen (Freudenthal 1973). Entsprechende Hochschuldidaktische Initiativen planen stärker genetisch orientierte Vorgehensweisen (Beutelspacher et al. 2011) oder „Schnittstellenaufgaben " (siehe Teil 3) ein.

Wissenschaftssoziologische Betrachtungsweisen fokussieren insbesondere den Prozess der Enkulturation als die Aneignung von Grundverhaltensweisen einer Kultur. Seaman und Szydlik (2007) prägten den Begriff „mathematical sophistication" als Ergebnis der Enkulturation in die Gemeinschaft der praktizierenden Mathematiker und als Ausdrucksform einer verfeinerten Fachkultur mit zugehörigen spezifischen Werthaltungen (siehe Teil 2).

Dieses Problemspektrum wird durch aktuelle gesellschaftliche Randbedingungen verschärft. Das Bestreben der Bildungspolitik nach verstärkter Bildungsbeteiligung bei gleichzeitiger Tendenz zur Verkürzung der Schulzeit führt zu einem sinkenden Eingangsniveau bei Studienbeginn und zu einer großen Streuung des Leistungsspektrums. Hinzu kommen weitere Herausforderungen wie kulturelle und sprachliche Vielfalt, veränderte Familienstrukturen und ein veränderter Umgang mit Wissen im digitalen Zeitalter.

Für Lehrkräfte an Gymnasien hat sich dadurch eine Akzentverschiebung des Selbstverständnisses vom Wissenschaftler zum Erzieher ergeben. Die rein fachlichen Ausbildungsanteile pro Unterrichtsfach sind mancherorts auf ein Viertel des gesamten Studienvolumens geschrumpft. Daraus resultieren auch Veränderungen im fachbezogenen Bewusstsein der Absolventen. Die fachwissenschaftlichen Anforderungen werden als zu hoch empfunden, der Berufsbezug als zu gering, und oft besteht überhaupt eine mangelnde Identifikation mit dem Fach (Pieper-Seier 2002). Ein Vergleich zwischen Diplom-Studierenden und Lehramtsstudierenden (Blömeke 2009) ergab zwar gleiche kognitive Eingangsvoraussetzungen (!), aber Unterschiede in Bezug auf fachliches Interesse, Studienmotivation und Persönlichkeitsmerkmale: Mathematiklehrkräfte sind stärker bindungs- und kooperationsorientiert. Diesem Personenkreis kämen ggf. kooperative Lernformen und eine Betonung der menschlichen Erlebenskomponente bei mathematischen Entdeckungen besonders entgegen.

Wo könnten nun Ansatzpunkte für eine Neuorientierung des gymnasialen Lehramtsstudiums liegen? Wenn der Mathematikunterricht im Rahmen des Möglichen ein gültiges Bild des Faches Mathematik als Schlüsseltechnologie und Kulturgut vermitteln soll, dann gehört dazu auch die authentische Erfahrung, wie mathematische Wissensbildung geschieht, wie also das

„Getriebe“ des Faches (siehe oben) funktioniert. Eine Facette ist zum Beispiel das Erleben, mit welchen gedanklichen Ordnungsmitteln die Mathematik es schafft, „Übersicht und Einsicht in einen verwirrenden unüberschaubaren Problembereich“ zu gewinnen (Winter 1972) und mit welchen Strategien zunächst unlösbar erscheinende Probleme bewältigt werden. Solche Erfahrungen sind auf jeder Lernstufe möglich und können dazu beitragen, die Kluft zwischen Schul- und Hochschulmathematik zu verringern.

2. Das gymnasiale Lehramtsstudium – Zielsetzungen auf Basis eines Literacy-Modells

Wir greifen für unsere weiteren Überlegungen das aus der Sprachwissenschaft stammende Literacy-Modell von Macken-Horarik (1998) auf und entwickeln eine auf die Mathematik bezogene Interpretation. Diese hat sich für uns als hilfreicher Orientierungsrahmen bei Überlegungen erwiesen, wie „Stoff“ und „Methode“ gleichzeitig vermittelt werden können. Das Modell besteht aus vier aufeinander aufbauenden Stufen.

Stufe 1: Everyday Literacy. Diese Stufe betrifft Wissen aus der Alltagserfahrung, „based on personal and communal experience“ (a.a.O). In unserer mathematikbezogenen Version des Modells fassen wir darunter diejenigen Elemente der Mathematik, die im Alltag sichtbar vorkommen und deren Beherrschung für eine gesellschaftliche Teilhabe wichtig ist. Dazu gehören u.a. elementares Rechnen, elementares logisches Schließen, ein Verständnis für Wahrscheinlichkeiten und eine allgemeine „Lese- und Interpretationsfähigkeit“ (vgl. Vohns, in diesem Band) für mathematische und mathematikhaltige Darstellungen, wie z.B. Tabellen, Funktionsgraphen, statistische Grafiken und Prozentangaben.

Stufe 2: Applied Literacy. Wissen auf dieser Stufe ist an den Zweck einer bereits spezialisierten Verwendung gebunden („skills literacy“, „using a specific skill or ‘know-how’, based on aquired expertise“). Auf die Mathematik bezogen fassen wir hierunter das Wissen, mit dem sich die Mathematik gegenüber anderen Disziplinen (z.B. Ingenieurwissenschaften) darstellt und ihnen Werkzeuge zur Lösung bestimmter Aufgaben bereitstellt. In der Mathematikausbildung betonen wir diese Literacy-Stufe, wenn in Übungs- und Prüfungsaufgaben Fertigkeiten der folgenden Art gefordert sind:

- Bestimme die Extrema der Funktion f: ...
- Diagonalisiere die Matrix A = ...

Stufe 3: Theoretical Literacy. Dies ist die Stufe des disziplinären Wissens. Wir fassen hierunter das Wissen, wie es die Mathematik etwa in publizierten Arbeiten und Monographien explizit darstellt. In der Mathematikausbildung (z.B. in Übungs- und Prüfungsaufgaben) wird diese Literacy-Stufe angesprochen, wenn es um das Verstehen von Definitionen und Sätzen geht oder wenn Fragen des folgenden Typs gestellt werden:

– „Beweisen Sie, dass …“
– „Wie kann man den Zwischenwertsatz beweisen?“

Stufe 4: Reflexive Literacy. Diese oberste Stufe („probing assumed and specialized knowledge systems“) interpretieren wir für die Mathematik als den Bereich, in dem es um das (oft implizite) Wissen über das Arbeiten in der Disziplin geht, das innerhalb der Fachgemeinschaft weitergegeben wird. Die Anforderung liegt hier darin, das Wissenssystem der Disziplin als solches zu verstehen: Was will die Disziplin? Wie macht sie das? Warum wird es so gemacht?

Auf eine solche Wissensform oberhalb der theoretischen Stufe weist bereits Toeplitz (1928) hin, wenn er fordert, dass Studierende das „innere Getriebe“ des Fachs verstehen sollen. In ausdifferenzierterer Form beschreiben es Seaman und Szydlik (2007) als Ergebnis erfolgreicher Enkulturation. Prediger und Hefendehl-Hebeker (2016) erfassen es im Konstrukt des epistemologischen Bewusstseins. Beispiele für Fragen auf dieser Stufe sind:

– Wie würde in dieser mathematischen Situation ein „natürlicher“ Satz lauten? (genuine Fragestellungen des Fachs)
– Kann man hoffen, dass er wahr ist? (Fachbezogene Intuition)
– Wäre das nützlich? Wäre das schön? (Werte und Ästhetik des Fachs)
– Was könnte man versuchen, um den erhofften Satz zu beweisen? (Heuristische Fähigkeiten)

Zielvorstellungen für die Ausbildung. Im sprachwissenschaftlichen Kontext fordert Brabazon (2011): „The function of an undergraduate degree is to propel students through the upper two slices of literacy.“ Die in Abschnitt 1 dargestellten Grundprobleme legen nahe, dass wir dieses Ziel auch in der Mathematik-Lehramtsausbildung als wesentlichen Teil der Professionalisierung von angehenden Lehrkräften verfolgen sollten – diese sollen als Repräsentanten der Fachgemeinschaft auftreten und die Denkweisen des Fachs im Unterricht adressatengerecht zur Geltung bringen können.

Gleichzeitig zeigen die aktuellen Problemverschärfungen, dass es schwieriger geworden ist, dieses Ziel zu erreichen. Macken-Horarik argumentiert, dass die vier Literacy-Stufen linear aufeinander aufbauen, man also nicht gleichzeitig auf allen Stufen lernen und Stufen nicht überspringen kann. Geht man davon aus, dass dies auch für die hier entwickelte mathematikbezogene Version gilt, dann besteht eine wesentliche Herausforderung für die Lehramtsausbildung darin, Lehramtsstudierende trotz der Beschränkungen eines schmalen Ausbildungsvolumens in die reflexive Stufe zu führen, obwohl man sie nicht zu forschenden Mathematikern wird ausbilden können. Es liegt eine Gefahr darin, die Lehramtsausbildung schlicht als verkürzte Fachausbildung zu betrachten, die dann (etwa im Bemühen um eine Begrenzung der Anforderungen) im Wesentlichen auf der Stufe der Applied Literacy bleibt, mit einigen „Einblicken" in die Theoretical Literacy. Brabazon (a.a.O.) warnt davor, dass Lernende ohne Intervention auf der Stufe der Applied Literacy verbleiben, „not even aware of the availability of higher-order models for thinking". Vergleichbares ist auch in Bezug auf die Mathematikausbildung zu befürchten – wenn die Studienordnung oder das Design der Prüfungen es so anlegen, dann stecken die Studierenden tatsächlich in den unteren Literacy-Stufen fest.

3. Ansätze zur Umsetzung

In den letzten 20 Jahren wurden unterschiedliche Maßnahmen ergriffen, um die diagnostizierten Probleme anzugehen. Wir können diese idealtypisch unterscheiden in *Maßnahmen mit Änderungen im Studienablauf* (durch spezielle Veranstaltungen) und *Maßnahmen mit Änderungen in der Binnenstruktur von Lehrveranstaltungen*. Daneben gibt es auch Projekte, die beide Bereiche verbinden, wie z.B. das Projekt „Mathematik Neu Denken" (Beutelspacher et al. 2011). Bei Projekten mit Änderungen im Studienablauf lassen sich verschiedenartige Ansätze unterscheiden:

(1) *Einführungen in das mathematische Denken und Arbeiten zu Studienbeginn*, wie etwa bei D. Grieser (Oldenburg) mit einem Schwerpunkt „Mathematisches Problemlösen und Beweisen", bei J. Hilgert (Paderborn) mit einem zusätzlichen Schwerpunkt auf dem Lesen und Schreiben mathematischer Texte und bei R. Biehler (Paderborn) in einer Erstsemesterveranstaltung „Einführung in die Kultur der Mathematik".

(2) *Begleiten der Anfängervorlesungen in Analysis und Linearer Algebra durch elementarmathematische Veranstaltungen*, so im Projekt „Mathematik Neu Denken" (Beutelspacher/Danckwerts, Gießen/Siegen) mit einer Veranstaltung „Schulanalysis vom höheren Standpunkt"

(3) *Einschalten von Schnittstellenmodulen* (siehe Bauer, in diesem Band)

Projekte mit Änderungen in der Binnenstruktur von Lehrveranstaltungen sind möglicherweise sogar zahlreicher als die globalen Ansätze. Wir nennen beispielhaft zwei niederschwellige Ansätze, deren Ziel es ist, die Studierenden in die oberen zwei Literacy-Stufen zu führen.

A. Förderung der Theoretical Literacy durch Peer Instruction. In Bauer (2017) wird ein Ansatz dargestellt, bei dem die Methode der Peer Instruction, die aus Flipped-Classroom-Szenarien bekannt ist (Mazur 1997), für den Einsatz in mathematischen Übungsgruppen nutzbar gemacht wird. Das Ziel dabei ist es, durch herausfordernde konzeptuelle Fragen die Studierenden fokussiert zu aktivieren (vgl. Chi 2009, Renkl 2011) und dadurch den Übergang zur Theoretical Literacy zu fördern.

B. Förderung der Reflexive Literacy durch Aufgaben mit Forschungselementen. Übungsaufgaben der Art „Zeige, dass ...“, die einen Satz vorgeben und einen Beweis fordern, bilden ein bewährtes Format von Problemlöseaufgaben in der Mathematikausbildung. In der mathematischen Forschung gehen dem Beweisen allerdings in der Regel andere Phasen voraus: Idealtypisch kann man die Phasen

Exploration (etwa an Beispielen) –> Generieren einer Vermutung –> Beweis

unterscheiden. Solche Prozesse zu verstehen und selbst vollziehen zu können ist wesentlich für den Übergang von der theoretischen zur reflexiven Stufe. In Bauer (2018) wird vorgeschlagen, dies mit Hilfe von geeigneten Übungsaufgaben per Scaffolding anzuregen. Die Verbindung der Exploration mit den Phasen des Vermutens und Beweisens wird dabei so angelegt, dass, dass *Cognitive Unity* möglich ist (siehe Boero et al. 1996, Garuti et al. 1998). Solche Aufgaben können als Zwischenstufe zum forschungsnahen Lehren und Lernen im Sinne von Huber (2014) verstanden werden.

4. Bilanz und Anschlussfragen

Für den erfolgreichen Umgang mit dem hier entfalteten Problemkreis ist es eine *grundlegende Notwendigkeit,* dass ein intensiver Austausch zu den angesprochenen Fragen, Zielsetzungen und Lösungsansätzen stattfindet. Dazu ist es wichtig, dass vorhandene Ansätze bekannt gemacht und diskutiert werden. Dies wiederum erfordert passende Gelegenheiten und positive Anreize gerade für Fachwissenschaftler, da in der Fachcommunity das Publizieren von Ansätzen in der Lehre wenig Tradition hat. Darüber hinaus sollte der Austausch zwischen allen beteiligten Akteuren (Fachwissenschaft, Fachdidaktik, Bezugswissenschaften) gefördert werden. Ein geeignetes Forum für diese Aktivitäten ist die Hochschuldidaktik als „Emerging Field“, zum Beispiel vertreten durch das khdm mit Arbeitsgruppen wie z. B. WiGeMath, das Hanse-Kolloquium zur Hochschuldidaktik der Mathematik und den Arbeitskreis HochschulMathematikDidaktik der GDM.

Dabei sind *grundlegende Fragen* wie die folgenden zu bearbeiten:

- Wie lassen sich Stoffumfang und Eindringtiefe ausbalancieren? Dies ist ein schwieriges Optimierungsproblem – die simple Lösung, die Lehramtsausbildung als verkürzte Fachausbildung (im Sinne von „leichter“ und auf niedrigen Literacy-Stufen) zu betrachten, greift deutlich zu kurz.
- In welchem Umfang sind dafür eigene Lehrveranstaltungen im Lehramtsstudium sinnvoll? Falls solche durchgeführt werden, so benötigen sie ein eigenes Profil im Sinne der in diesem Aufsatz beschriebenen Zielsetzungen – eine Simplifizierung wie „die schwierigen Beweise weglassen“ würde diesen Zielen sicherlich nicht gerecht.

Als *grundlegende Begleitmaßnahme* halten wir eine *flankierende Bewusstseinsbildung* in allen tangierten Bereichen für notwendig. Die Lehrerbildung ist als Feld gemeinsamer Verantwortung von allen Akteuren ernst zu nehmen. Die Bildungspolitik sollte sich dessen bewusst sein, dass eine Bewältigung der aktuellen Herausforderungen entsprechende Ressourcen und einen überlegten Einsatz der Mittel erfordert. Für die Studierenden ist die Vorbereitung auf die Anforderungen ihres Berufes im Spannungsfeld zwischen fachbezogenem Fördern und Fordern nicht ohne mentale Anstrengung zu haben. Wünschenswert wäre es auch, wenn in der Gesellschaft insgesamt das Ansehen des Lehrerberufes durch Professionalisierung der Unterrichtenden und durch Bewusstseinsbildung bei den Außenstehenden wieder gestärkt werden könnte.

Literatur

Bauer, Th. (2017). Peer Instruction als Instrument zur Aktivierung von Studierenden in mathematischen Übungsgruppen. Preprint.

Bauer, Th. (2018). Enkulturation durch fachmathematische Lehrveranstaltungen im gymnasialen Lehramtsstudium – Hürden und Ansätze. Preprint.

Beutelspacher, A., Danckwerts, R., Nickel, G., Spies, S., & Wickel, G. (2011): *Mathematik neu denken. Impulse für die Gymnasiallehrerbildung an Universitäten.* Wiesbaden: Springer 2011.

Blömeke, S. (2009). Ausbildungs- und Berufserfolg im Lehramtsstudium im Vergleich zum Diplom-Studium – Zur prognostischen Validität kognitiver und psycho-motivationaler Auswahlkriterien. *Zeitschrift für Erziehungswissenschaft, 12(1*), 82–110.

Boero, P., Garuti, R., & Mariotti, M.A. (1996). Some dynamic mental processes underlying producing and proving conjectures. In: *Proceedings of PME-XX,* Valencia, vol. 2, 121-128.

Brabazon, T. (2011). 'We've Spent too Much Money to Go Back Now': Credit-Crunched Literacy and a Future for Learning. *E-Learning and Digital Media, 8(4),* 296-314.

Chi, M. T. (2009). Active-constructive-interactive: A conceptual framework for differentiating learning activities. *Topics in Cognitive Science, 1(1),* 73–105.

Dietz, H. M. (2016). CAT – ein Modell für lehrintegrierte methodische Unterstützung von Studienanfängern. In: A. Hoppenbrock, R. Biehler, R. Hochmuth, H.-G. Rück (Hrsg.), *Lehren und Lernen von Mathematik in der Studieneingangsphase. Herausforderungen und Lösungsansätze* (S. 131–147). Wiesbaden: Springer.

Freudenthal, H. (1973). *Mathematik als pädagogische Aufgabe.* Vol 1, 2. Stuttgart: Klett.

Garuti, R. Boero, P., & Lemut, E. (1998). Cognitive Unity of Theorems and Difficulty of Proof. In: *Proceedings of PME-XXII*, Stellenbosch, vol. 2, 345-352.

Hilgert, J., Hoffmann, M., & Panse, A. (2015). *Einführung in mathematisches Denken und Arbeiten.* Berlin, Heidelberg: Springer.

Huber, L. (2014). Forschungsbasiertes, Forschungsorientiertes, Forschendes Lernen: Alles dasselbe? Ein Plädoyer für eine Verständigung über Begriffe und Unterscheidungen im Feld forschungsnahen Lehrens und Lernens. *Das Hochschulwesen, 1(2),* 32-39.

Klein, F. (2008). *Elementarmathematik vom höheren Standpunkte aus. Bd. I (Arithmetik, Algebra, Analysis).* Berlin: B. G. Teubner.

Macken-Horarik, M. (1998). Exploring the Requirements of Critical School Literacy: a view from two classrooms, In: F. Christie, R. Mission (Eds.) *Literacy and Schooling* (pp. 74-103). London: Routledge.

Mazur, E. (1997). Peer Instruction: Getting students to think in class. In: E.F. Redish & J.S. Rigden (eds.), *The Changing Role of Physics Departments in Modern Universities* (pp. 981-988). The American Institute of Physics.

Pieper-Seier, I. (2002). Lehramtsstudierende und ihr Verhältnis zur Mathematik. In: W. Peschek (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht. Vorträge auf der 36. Tagung für Didaktik der Mathematik vom 25. Februar bis 1. März 2002 in Klagenfurt* (S. 395–398). Hildesheim.

Prediger, S., & Hefendehl-Hebeker, L. (2016). Zur Bedeutung epistemologischer Bewusstheit für didaktisches Handeln von Lehrkräften. *Journal für Mathematik-Didaktik, 37(1),* 239-262.

Renkl, A. (2011). Aktives Lernen: Von sinnvollen und weniger sinnvollen theoretischen Perspektiven zu einem schillernden Konstrukt. *Unterrichtswissenschaft, 39(3),* 197-212.

Seaman, C., & Szydlik, J., (2007). Mathematical sophistication among preservice elementary teachers. *Journal of Mathematics Teacher Education, 10,* 167-182

Sfard, A. (1995): The Development of Algebra: Confronting historical and psychological Perspectives. *Journal of Mathematical Behavior 14*, 15-39.

Toeplitz, O. (1928). Die Spannungen zwischen den Aufgaben und Zielen der Mathematik an der Hochschule und an der höheren Schule. *Schriften des deutschen Ausschusses für den mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht, 11*(10), 1–16.

Winter, H. (1972). Vorstellungen zur Entwicklung von Curricula für den Mathematikunterricht in der Gesamtschule. In: Der Kultusminister des Landes Nordrhein-Westfalen (Hrsg.), *Beiträge zum Lernzielproblem* (S. 67–69). Ratingen: Henn