

„Mathematik ist eine beweisende Disziplin“ – auch im nordrhein-westfälischen Zentralabitur?

Es ist allgemein akzeptiert, dass Mathematik „eine beweisende Disziplin und in dieser Eigenschaft einzigartig“ ist (Reiss & Hammer, 2013). Insofern gehört es zu einem stimmigen Bild von Mathematik, dass dieses Charakteristikum auch im Unterricht erfahrbar wird. Dies steht im Einklang mit Heinrich Winters Konzept eines allgemeinbildenden Mathematikunterrichts:

„Der Mathematikunterricht sollte anstreben, die folgenden ... Grunderfahrungen ... zu ermöglichen: [...] *mathematische Gegenstände und Sachverhalte, repräsentiert in Sprache, Symbolen, Bildern und Formeln, als geistige Schöpfungen, als eine deduktiv geordnete Welt eigener Art kennen zu lernen und zu begreifen* [...] Das Wort Erfahrung soll zum Ausdruck bringen, dass das Lernen von Mathematik weit mehr sein muss als eine Entgegennahme und Abspeicherung von Informationen, dass Mathematik erlebt (möglicherweise auch erlitten) werden muss.“ (Winter, 1995; Herv. d. d. Verf.)

Diese Zielvorstellungen finden sich sowohl allgemein als auch unter der Kompetenz „Argumentieren“ weiter konkretisiert im aktuellen nordrhein-westfälischen Kernlehrplan für die gymnasiale Oberstufe: „Das Argumentieren umfasst das Begründen und Beweisen vermuteter Zusammenhänge durch Rückgriffe auf Bekanntes und die Regeln des mathematischen Schlussfolgerns sowie das Beurteilen von Argumentationsketten“.

Wenn das Beweisen also ein wichtiger Bestandteil des Mathematikunterrichts sein soll, müsste es sich auch in den Aufgaben Zentralabiturs in angemessener Form wiederfinden lassen. Im Folgenden stellen wir aufeinander bezogene Aufgabenanalysen vor, mit denen wir der Frage nachgegangen sind, inwieweit dies tatsächlich der Fall ist. Konkret haben wir die nordrhein-westfälischen Analysisaufgaben für Leistungskurse aus den Hauptterminen der Jahre 2007-2016 aus NRW als Datengrundlage herangezogen. Die Klassifizierung geschieht zunächst aus der Sicht der Aufgabensteller, indem wir die Verwendung potentiell beweishaltiger Aufgabenoperatoren erheben. Diesen Befunde kontrastieren wir in einem nächsten Schritt auf Grundlage des Klassifikationsschemas der COACTIV-Studie (Jordan et al., 2006).

Vorliegende Befunde aus konkreten Schülerbearbeitung, die weitere Aussagen zum tatsächlichen Argumentationsgehalt der Aufgaben ermöglichen, werden aus Platzgründen am Ende des Beitrags zusammenfassend berichtet. Eine ausführlichere Darstellung dieser Analysen wird an anderer Stelle veröffentlicht (Bauer & Büchter, i. Vorb.).

1. Der Argumentationsgehalt gemessen an den Operatoren

Die Konstruktion von Abituraufgaben vollzieht sich entlang definierter Konstruktionsmerkmale. Dazu gehören insbesondere die zu verwendenden „Aufgabenoperatoren“, die von Amts wegen beschrieben und drei unterschiedlichen Anforderungsniveaus (AFN) zugeordnet sind. In NRW waren das in den Jahren 2007-2016 die folgenden Operatoren:

AFN I: angeben/nennen, berechnen, beschreiben, erstellen/darstellen, skizzieren, zeichnen/graphisch darstellen

AFN II: begründen, beschreiben, bestimmen/ermitteln, entscheiden, erklären, herleiten, interpretieren, untersuchen/prüfen, vergleichen, zeichnen/graphisch darstellen, zeigen/nachweisen

AFN III: begründen, bestimmen/ermitteln, beurteilen, beweisen/widerlegen, interpretieren, vergleichen, zeigen/nachweisen.

Wir schlüsseln die Anteile der Operatoren an den Aufgaben in (1) *entscheiden*, (2) *erklären*, (3) *herleiten*, (4) *begründen*, (5) *interpretieren*, (6) *zeigen/nachweisen*, (7) *beurteilen* und (8) *beweisen/widerlegen* auf. Die restlichen Operatoren werden in einer Klasse formal weniger argumentationshaltiger Operatoren (0) zusammengefasst. Dabei erhält die durch den Operator eingeführte Teilaufgabe ein Gewicht gemäß ihrer Bepunktung. Zudem haben wir die drei Analysisaufgaben in zwei Gruppen eingeteilt. In der ersten Gruppe sind die ersten beiden Aufgaben eines Jahrgangs, die in einen Sachkontext eingebettet sind, die zweite Gruppe besteht aus der innermathematisch gestellten, dritten Analysisaufgabe. Die so ermittelten Anteile werden für die Aufgaben der Jahre 2007-2016 in Tabelle 1 dargestellt.

	0	1	2	3	4	5	6	7	8
Sachkontext	70,7%	0,4%	1,4%	1,0%	10,5%	4,0%	11,4%	0,6%	0,0%
innermathematisch	61,6%	0,0%	0,6%	0,0%	8,6%	1,0%	23,2%	0,0%	5,0%

Tab. 1: Anteile der Operatoren mit Argumentationsgehalt

Der nach dem oben beschriebenen Vorgehen ermittelte Argumentationsanteil beträgt bei den Aufgaben mit Sachkontext nominell ca. 30 %. Die Schwerpunkte liegen dabei auf den Operatoren *begründen*, *interpretieren* und *zeigen/nachweisen*. Der Operator *beweisen/widerlegen* tritt nicht auf. Bei den innermathematisch gestellten Aufgaben ist der entsprechende Anteil insgesamt größer, wobei auf der Operator *beweisen/widerlegen* (mit einem Anteil von 5 %) auftritt. Vor dem Hintergrund dieser Zahlen scheint das Argumentieren – auch im Sinne des Beweisens im engeren Sinne – in NRW auch in den Zentralabituraufgaben angemessen vertreten zu sein.

2. Klassifizierung nach dem COACTIV Schema

In einem zweiten Schritt haben wir die Aufgaben stärker inhaltlich in Anlehnung an das Klassifizierungsschema aus der COACTIV-Studie klassifiziert; das Argumentationsniveau wird dabei in die folgenden vier Stufen unterteilt:

<i>Code</i>	<i>Code-Beschreibung</i>
(0)	Keine Argumentation notwendig
(1)	Bloße Wiedergabe von Standardargumentationen, Argumentationen durchführen, für die Alltagswissen genügt; einschrittige oder rein rechnerische Argumente entwickeln
(2)	Überschaubare mehrschrittige, auch begrifflich geprägte mathematische Argumente entwickeln und schriftlich darlegen oder ggf. solche nachvollziehen
(3)	Komplexe mathematische Argumente (Begründungen, Beweise, Strategien, Verallgemeinerungen) entwickeln und schriftlich darlegen oder ggf. solche nachvollziehen; verschiedene Arten von mathematischen Argumentationen und deren Effizienz vergleichen oder bewerten

Tab. 2: Codes der COACTIV-Studie

Die Klassifikation der Teilaufgaben erfolgte im Rahmen einer Masterarbeit und durch einen der beiden Autoren. Da der tatsächliche Argumentationsgehalt vom eingeschlagenen Lösungsweg abhängen kann, haben sich beide dabei an der amtlich vorgeschlagenen Lösung orientiert. Das Ergebnis ist in Tabelle 3 wiedergegeben.

<i>Code</i>	<i>(0)</i>	<i>(1)</i>	<i>(2)</i>	<i>(3)</i>
Sachkontext	72,4%	25,4%	2,2%	0,0%
innermathematisch	67,8%	23,0%	8,0%	1,2%

Tab. 3: Codierung nach Argumentationsniveaus gemäß der COACTIV-Studie

Interessant ist auch Vergleich der verwendeten Operatoren mit den nach dem COACTIV-Schema erhobenen Niveaus; bei der Darstellung beschränken wir uns auf die häufigsten Operatoren und geben die Ergebnisse getrennt nach Aufgabengruppen an.

<i>Operator</i>	<i>Gesamtanteil</i>	<i>(0)</i>	<i>(1)</i>	<i>(2)</i>	<i>(3)</i>
<i>bestimmen/ermitteln</i>	41,2%	31,2%	10,0%	0,0%	0,0%
<i>begründen</i>	10,5%	1,4%	7,6%	1,5%	0,0%
<i>zeigen/nachweisen</i>	11,4%	5,0%	6,4%	0,0%	0,0%
<i>beweisen/widerlegen</i>	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%

Tab. 4: Verteilung auf die COACTIV-Niveaus für die Aufgaben mit Sachkontext

<i>Operator</i>	<i>Gesamtanteil</i>	<i>(0)</i>	<i>(1)</i>	<i>(2)</i>	<i>(3)</i>
<i>bestimmen/ermitteln</i>	40,6%	34,6%	6,0%	0,0%	0,0%
<i>begründen</i>	8,6%	1,6%	4,0%	3,0%	0,0%
<i>zeigen/nachweisen</i>	23,2%	14,0%	8,6%	0,6%	0,0%
<i>beweisen/widerlegen</i>	5,0%	0,0%	0,0%	3,8%	1,2%

Tab. 5: Verteilung auf die COACTIV-Niveaus für die innermathematisch gestellten Aufgaben

Auffallend ist, dass insbesondere dem Operator *zeigen/nachweisen*, aber auch dem Operator *begründen* in beiden Fallgruppen in einigen Fällen kein Argumentationsgehalt (Niveau 0)) zugebilligt wurde. In diesen Fällen handelt es sich durchgehend um rechnerische Bestimmungsaufgaben. Der *zeigen/nachweisen* Operator ist dadurch begründet, dass eine Kontrolllösung mitgeteilt wird. Als ein Beispiel sei die folgende Aufgabe aus dem Abitur 2008 (Haupttermin, Teilaufgabe 1 c) aufgeführt: „Zeigen Sie durch Integration, dass die Funktion F_{10} mit $F_{10}(t) = 40 \cdot (-t - 4) \cdot e^{-0,25 \cdot t}$ eine Stammfunktion von F_{10} ist.“ Auf der anderen Seite verstecken sich einige rechnerische Argumente (Niveau(1)) hinter dem Operator *bestimmen/ermitteln*.

Insgesamt ergibt sich das Bild, dass mathematische Argumentationen auf höherem Niveau und insbesondere das Beweisen im engeren Sinne – anders als durch die Operatoren zunächst suggeriert wird – doch eher eine untergeordnete Rolle in den Abituraufgaben spielen. Dabei sind diese typisch mathematischen Tätigkeiten (auch nach der Konkretisierung im Kernlehrplan) bei den innermathematisch gestellten Aufgaben stärker vertreten als bei den Aufgaben im Sachkontext.

3. Ausblick

Für den vorliegenden Beitrag haben wir Analysisaufgaben aus dem nordrhein-westfälischen Zentralabitur der Jahre 2007-2016 mit zwei unterschiedlichen Klassifizierungsschemata bezüglich ihres Argumentationsgehalts eingeschätzt. Dabei zeigte sich, dass eine stärker inhaltliche als formale Einschätzung einen eher geringen Argumentationsgehalt ergibt.

Die Analyse von Schülerbearbeitungen zeigt darüber hinaus, dass selbst unter den Argumentationsaufgaben nach dem COACTIV-Schema noch solche sind, die auch mit technischen Routinen gelöst werden können bzw. die aufgrund diffuser Erwartungen an die Schülerlösung nicht für Differenzierung der Argumentationsfähigkeit geeignet sind (vgl. Bauer & Büchter, i. Vorb.).

Literatur

- Bauer, S. & Büchter, A. (i. Vorb.). Zum Argumentationsgehalt von Analysisaufgaben im Zentralabitur – empirische Analysen und konzeptionelle Vorschläge. (Der Beitrag wird eingereicht bei *Mathematische Semesterberichte*.)
- Jordan, A., Ross, N., Krauss, S., Baumert, J., Blum, W., Neubrand, M., Löwen, K., Kunter, M., (2006). Klassifikationsschema für Mathematikaufgaben: Dokumentation der Aufgabenkategorisierung im COACTIV-Projekt. Berlin: MPI für Bildungsforschung
- Reiss, K. & Hammer, C. (2013). Grundlagen der Mathematikdidaktik. Basel: Birkhäuser.
- Winter, H. (1995). Mathematikunterricht und Allgemeinbildung. Mitteilungen der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik, 61, 37–46.