

Problem Posing – Ergebnisse einer empirischen Analyse zum Prozess des strukturierten Aufwerfens mathematischer Probleme

Probleme sind das Herz der Mathematik (Halmos, 1980, S. 524). Dabei steht nicht alleine das Problemlösen im Zentrum der Mathematik, sondern auch das Aufwerfen mathematischer Probleme, das sogenannte *Problem Posing*. Darunter versteht man das Generieren neuer sowie das Reformulieren gegebener Probleme (Silver, 1994, S. 19). Eine Variante des Problem Posings bildet die in der deutschsprachigen Literatur bekanntere Aufgabenvariation (Schupp, 2002). Hierbei wird eine Initialaufgabe nach ihrer Lösung (mit Blick auf einzelne Aspekte und Bedingungen) systematisch variiert. Obwohl die Fachmathematik dem Problem Posing eine hohe Bedeutung zuschreibt (Hadamard, 1945; Cantor, 1966), hat diese Tätigkeit in der mathematikdidaktischen Forschung bisher eine äußerst geringe Aufmerksamkeit erhalten. Insbesondere fehlen Erkenntnisse, wie entsprechende Prozesse in der Regel verlaufen, ob dabei bestimmte Phasen durchlaufen werden und wie diese inhaltlich beschrieben werden können.

Im Rahmen einer qualitativen Studie wurde der Versuch unternommen, aus theoretischer und empirischer Perspektive einen qualitativen Einblick in den Prozess des Aufwerfens mathematischer Probleme zu erlangen. Im Fokus waren *strukturierte* Problem-Posing-Aufgaben, bei denen – ähnlich wie bei Aufgabenvariationen – Probleme auf der Grundlage eines gegebenen und zu lösenden Problems aufgeworfen werden (Stoyanova & Ellerton, 1996). Dabei wurde das Ziel verfolgt, Phasen beim Aufwerfen von Problem zu identifizieren und Hypothesen für ein deskriptives Prozessmodell des strukturierten Problem Posings zu generieren.

Forschungsdesign

Bislang existieren nur wenige Erkenntnisse zum Prozess des Problem Posings und normative (z. B. Pólya, 1949; Schoenfeld, 1985, Kap. 4) oder deskriptive (z. B. Rott, 2014) Modelle, wie sie beim Problemlösen etabliert sind, existieren bislang nicht (Cai u.a., 2015). Diese Pilotstudie dient der Entwicklung eines *deskriptiven* Modells zur Beschreibung von Problem-Posing-Prozessen. Innerhalb dieses Forschungsdesiderats ergaben sich zwei Forschungsfragen:

1. Inwieweit lassen sich beim Prozess des strukturierten Problem Posings Phasen identifizieren?

2. Lassen sich aus den beobachteten Prozessen Hypothesen für ein mögliches deskriptives Prozessmodell des Problem Posings generieren?

Die Daten wurden mithilfe aufgabenzentrierter Interviews und der Technik des Lauten Denkens erhoben. Das Laute Denken hat vor allem in der Problemlöseforschung Verwendung gefunden, da mit deren Hilfe die kognitiven Prozesse von Proband*innen analysiert werden können (Konrad, 2010, S. 482). Die einstündigen Interviews wurden mit fünf Masterstudierenden für das Lehramt Mathematik an Gymnasien und einem forschenden Mathematiker, der durch die Aufgabenentwicklung für einen Mathematikwettbewerb Expertise als Problem Poser aufweist, geführt. In diesen wurden je nach Bearbeitungszeit der Proband*innen zwei bis drei Problem-Posing-Aufgaben bearbeitet, sodass 13 Prozesse zur Analyse vorlagen.

Für die Prozessauswertung wurde die von Rott (2014) angepasste *Verbal Protocol Analysis* Schoenfelds (1985) für Problem-Posing-Prozesse adaptiert. Bei dieser Methode werden die Prozesse zunächst in Episoden eingeteilt, die Schoenfeld (1985) als „macroscopic chunks of consistent behavior“ (S. 292) beschreibt. In einer zweiten analytischen Durchsicht werden diese Zeitabschnitte konsistenten Verhaltens inhaltlich beschrieben und deren Charakteristika zu Episodentypen herausgestellt.

Ergebnisse

Episodentyp	Beschreibung
Analyse	<ul style="list-style-type: none"> – Erfassung der Bedingungen des Initialproblems – Analyse des Initialproblems im Hinblick auf Variations- und Generierungsmöglichkeiten
Variation	<ul style="list-style-type: none"> – Variation einzelner Bedingungen des Initialproblems – Beibehaltung des Charakters der Aufgabe (Lösungsstruktur, Fragestellung etc.)
Generierung	<ul style="list-style-type: none"> – Generierung eines gänzlich anderen Problems mit neuen und zu konstruierenden Bedingungen und Fragestellungen – Verwendung des <i>Problemgegenstandes</i> (Spielsteine beim NIM-Spiel) für die Generierung
Problemlösen	<ul style="list-style-type: none"> – Planen eines (mehr oder weniger) konkreten Weges zur Lösung des variierten oder generierten Problems – Ausführung des Plans ist dabei nicht obligatorisch
Evaluation	<ul style="list-style-type: none"> – Bewertung des aufgeworfenen Problems auf der Grundlage individueller Kriterien (ist es angemessen lösbar, sinnvoll, vollständig, unterscheidet es sich vom Initialproblem etc.)

Tab. 1: Episodentypen des strukturierten Problem Posings

Forschungsfrage 1: Mithilfe der benannten Methode wurden fünf Episodentypen (vgl. Tab. 1) herausgearbeitet, mit denen sich die erhobenen Prozesse zeitdeckend beschreiben lassen. Diese Beschreibungen bilden ein zentrales Ergebnis dieser Pilotstudie. Die Episodentypen sind nicht völlig trennscharf voneinander; vor allem zwischen der *Variation* und der *Generierung* müssen Grenzfälle diskutiert werden. Außerdem wurde das Setzen der Episodengrenzen sowie die inhaltliche Bestimmung der Episodentypen bislang nur konsensuell validiert und eine unabhängige Kodierung steht noch aus.

Forschungsfrage 2: Über die Aufgaben und Proband*innen hinweg konnten zentrale prozessuale Muster ausgemacht werden. Zum einen beginnen zahlreiche Prozesse mit einer *Analyse* des Initialproblems. Außerdem wurde häufig der Dreischritt aus *Variation* bzw. *Generierung*, *Problemlösen* und *Evaluation* beobachtet. Das aufgestellte Problem wird von den Proband*innen schließlich akzeptiert oder verworfen. Zwischen den Episoden können nun (nahezu) sämtliche Phasenübergänge auftreten. Zudem hat sich der Prozess des Aufwerfens von Problemen als zyklisch herausgestellt: Nachdem ein Problem aufgeworfen wurde, folgt das Aufstellen weiterer Probleme. Das aus diesen Überlegungen entstandene Modell ist in Abbildung 1 dargestellt.

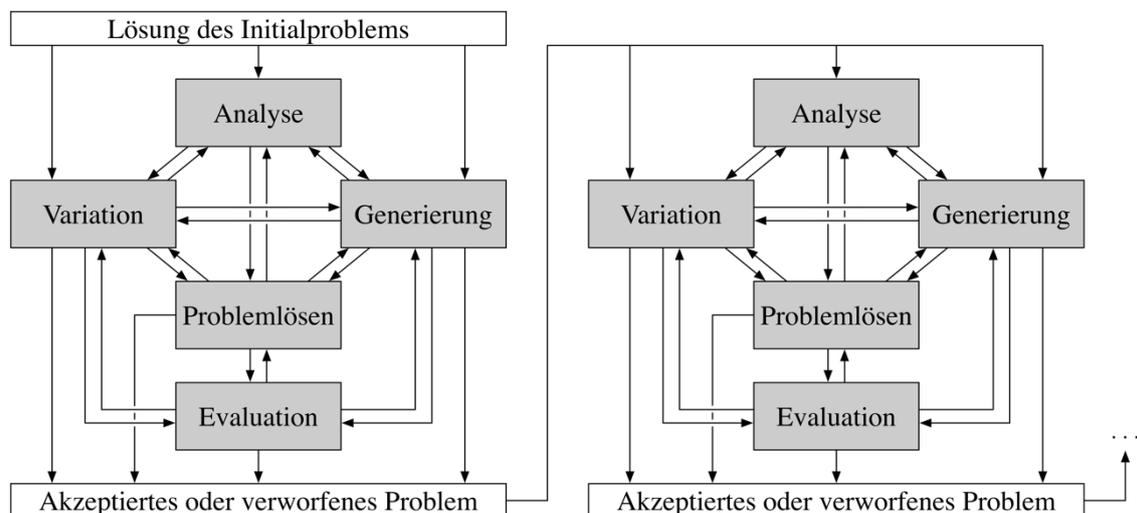


Abb. 1: Deskriptives Prozessmodell des strukturierten Problem Posings

Aufgrund der kleinen Stichprobe wurden nicht alle Phasenübergänge beobachtet, sondern zum Teil aufgrund empirischer und theoretischer Überlegungen extrapoliert. Außerdem steht die Überprüfung der Anwendbarkeit des Modells auf eine andere Stichprobengruppe und andere Problem-Posing-Situationen noch aus. Aus diesem Grund versteht sich das Modell als vorsichtige Hypothese eines aktuell noch nicht existenten deskriptiven Prozessmodells des Problem Posings.

Diskussion und Ausblick

Drei weiterführende Aspekte werden in Bezug auf diese Forschungsergebnisse zukünftig fokussiert: Zunächst soll ein Kodiermanual entwickelt werden, mit dessen Hilfe die Interraterübereinstimmung des Modells untersucht wird. Außerdem scheint in Anlehnung an Pólya (1949) die Entwicklung eines *normativen* Modells lohnend, bei der die Befragung und Beobachtung erfahrener Problem Poser zielführend sein kann. Da sich die Tätigkeiten des strukturierten Problem Posings und des vorigen Problemlösens notwendigerweise wechselseitig beeinflussen, steht auch die Analyse eben dieses Zusammenhangs im Fokus weiterer Forschungsvorhaben.

Literatur

- Cai, J., Hwang, S., Jiang, C. & Silber, S. (2015). Problem-posing Research in Mathematics Education: Some Answered and Unanswered Questions. In F. M. Singer, N. F. Ellerton & J. Cai (Hrsg.), *Mathematical Problem Posing. From Research to Effective Practice* (S. 3–34). New York: Springer.
- Cantor, G. (1966). *Gesammelte Abhandlungen mathematischen und philosophischen Inhalts. Mit erläuternden Anmerkungen sowie mit Ergänzungen aus dem Briefwechsel Cantor-Dedekind*. Hildesheim: Georg Olms.
- Hadamard, J. (1945). *The Psychology of Invention in the Mathematical Field*. New York: Dover Publications.
- Halmos, P. R. (1980). The Heart of Mathematics. *The American Mathematical Monthly*, 87(7), 519–524.
- Konrad, K. (2010). Lautes Denken. In G. Mey & K. Mruck (Hrsg.), *Handbuch Qualitative Forschung in der Psychologie* (S. 476–490). Wiesbaden: VS Verlag für Sozialwissenschaften.
- Pólya, G. (1949). *Schule des Denkens. Vom Lösen mathematischer Probleme*. Bern: Narr Francke Attempo.
- Rott, B. (2014). Mathematische Problembearbeitungsprozesse von Fünftklässlern – Entwicklung eines deskriptiven Phasenmodells. *Journal für Mathematik-Didaktik*, 35 (2), 251–282.
- Schoenfeld, A. H. (1985). *Mathematical Problem Solving*. Orlando: Academic Press.
- Schupp, H. (2002). *Thema mit Variationen. Aufgabenvariationen im Mathematikunterricht*. Hildesheim: Franzbecker.
- Silver, E. A. (1994). On Mathematical Problem Posing. *For the Learning of Mathematics*, 14(1), 19–28.
- Stoyanova, E. & Ellerton, N. F. (1996). A framework for research into students' problem posing in school mathematics. In P. C. Clarkson (Hrsg.), *Technology in mathematics education* (S. 518–525). Mathematics Education Research Group of Australasia: Melbourne.