

## **Geleitetes Modellieren – Einsatz von Modellen im Würzburger Mathematik-Labor**

Im Würzburger Mathematik-Labor können Schülerinnen und Schüler der Sekundarstufe selbsttätig und aktiv-experimentell Phänomene aus Umwelt und Mathematik hinsichtlich ihres mathematischen Hintergrunds untersuchen, wobei sie sich mit verschiedenartigen Modellen auseinandersetzen. Sie werden hierbei durch Aufgabenhefte angeleitet. Im Beitrag wird zunächst knapp die Grundidee des Mathematik-Labors vorgestellt. Anschließend werden Aufgabenhefte und empirisch erfasste Arbeitsprozesse auf die Frage hin analysiert, welche Modelle in welchen Arbeitsphasen von Bedeutung sind.

### **1. Das Würzburger Mathematik-Labor**

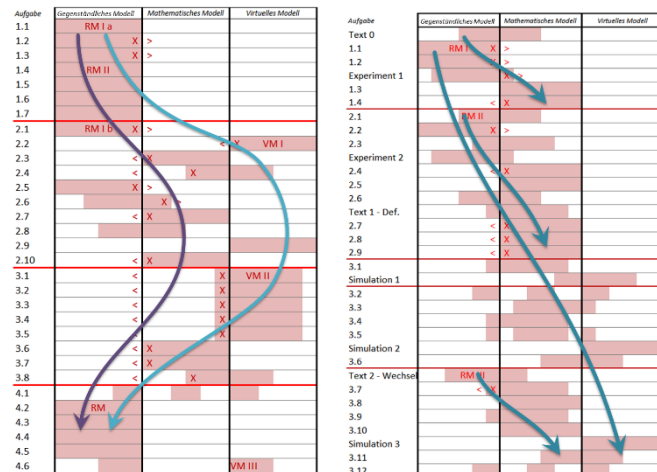
Typische Fragestellungen von Stationen im Mathematik-Labor lauten: Wie funktioniert ein Scheibenwischer, welche Fläche wischt er? Wie viele wirklich verschiedene Gänge hat eine Fahrradschaltung? Welche Arten von Figuren lassen sich mit einem Spirographen zeichnen? Die Erarbeitung von Antworten folgt dabei dem 3-Phasen-Modell (vgl. Appell et al., 2008): Die Lernenden können an gegenständlichen Modellen *experimentieren*, Teilprobleme mit computergestützten, virtuellen Modellen *simulieren* und werden angehalten, Zusammenhänge zu *mathematisieren*, also durch mathematische Modelle zu beschreiben. Allerdings sind die betrachteten Zusammenhänge in der Regel komplex und der Zeitrahmen mit 180 Minuten pro Station knapp, weshalb didaktische Reduktionen vorgenommen und die genannten Modelle zur Veranschaulichung und als Gesprächsgrundlage angeboten werden. Zusätzlich stehen den Lernenden Arbeitshefte zur Verfügung, die sie mittels Aufgaben kleinschrittig in und durch das Phänomen führen. Diese Hefte wurden (und werden) jeweils von Lehramtsstudierenden im Rahmen von Abschlussarbeiten zusammengestellt, wobei keine detaillierten inhaltlichen Vorgaben gemacht wurden. Deshalb treten in den Heften durchaus verschiedene Herangehensweisen an diese Art des geleiteten Modellierens zutage – wie es im Folgenden zu sehen ist.

### **2. Analyse der Aufgabenhefte**

Durch die Analyse der Aufgabenhefte sollen zwei Grundfragen beantwortet werden: (1) Mit welchen Arten von Modelle sollen die Lernenden laut Anleitung arbeiten, und (2) welche Teilschritte des mathematischen Modellierens werden – trotz oder wegen der engen Führung – durch die Aufgabenhefte angesprochen? Zur Beantwortung dieser Fragen wurden die Hefte zunächst inhaltsanalytisch nach Beck & Wörler (2017) untersucht: Dabei wird

für jede Teilaufgabe eines Arbeitsheftes bestimmt, welcher Modelltyp – gegenständlich, mathematisch, virtuell – laut Aufgabenstellung verwendet werden soll und ob explizit Bezüge zu anderen Modelltypen hergestellt werden. In der grafischen Aufbereitung der Daten ergibt sich so ein vom Inhalt losgelöstes 3-Welten-Schema (Abb. 1).

Im Schema zur Station „Scheibenwischer“ (Abb. 1, li.) zeigt sich, dass vom gegenständlichen Modell ausgegangen wird (linke Spalte), verschiedene Mathematisierungsschritte durchgeführt werden (mittlere Spalte) und anschließend der Rückbezug zum gegenständlichen Modell vollzogen wird (linke Spalte); dieser Verlauf kann als ein Durchlaufen typischer Stationen des Modellierungskreis-



**Abb. 1:** 3-Welten-Analyse der Stationen „Scheibenwischer“ (links) und „Ziegenproblem“ (rechts)

laufes nach Blum & Leiß (2005) interpretiert werden; der Einsatz virtueller Modelle (rechte Spalte) findet eine Entsprechung in der Erweiterung des Modellierungskreises durch Siller & Greefrath (2010) um digitale Werkzeuge.

Das Analyseschema zum „Ziegenproblem“ (Abb. 1, re.) zeigt jedoch andere Strukturen: Hier werden – mehrmals – ausgehend von verschiedenen gegenständlichen Modellen eher linearere Wege über die mathematische Welt hinein in die virtuelle Welt durchschritten. Gegenständliche Modelle dienen hier der anschaulichen Einführung in die Problemstellung, Varianten der behandelten Zufallsexperimente oder eine größere Anzahl an Wiederholungen werden dann aber vorzugsweise am mathematischen Modell durchdacht und am virtuellen Modell experimentell erörtert.

Bei der Station zum „Spirographen“ (ohne Abb.) ist es sogar möglich, das gegenständliche Modell (hier: das Zeichengerät) vollständig durch ein virtuelles Modell (desselben Zeichengerätes) zu ersetzen; die zugehörigen Aufgaben sind ohne gegenständliche Modelle und lediglich am PC lösbar.

### 3. Modelle und ihre Rolle für das Modellieren

In diesem Zusammenhang stellt sich die Frage, welche Funktionen die Modelle im Arbeitsprozess der Lernenden erfüllen und wie sie Teilschritte des mathematischen Modellierens anregen und unterstützen.

Wir betrachten zunächst nochmals den „Scheibenwischer“: Die gegenständlichen Modelle unterstützen hier auf vielfältige Art und Weise die Mathematisierung, indem zum Beispiel in den ersten Aufgaben beim Experimentieren mit dem Modell Bezüge zum mathematischen Modell aufgezeigt oder im zweiten Aufgabenteil Realdaten geliefert werden (vgl. Abb. 1, li.: obere Zeilen). Die virtuellen Modelle dienen hier u. a. als Fokussierungshilfen, indem sie Unwesentliches maskieren und Relevantes herausstellen. Außerdem bieten sie die Möglichkeit, gezielt und systematisch Größen zu variieren und entsprechende Auswirkungen zu visualisieren und unterstützen dadurch ebenfalls die Mathematisierung. Indem in den Simulationen Bezüge zu den gegenständlichen Modellen aufgezeigt werden, fördern sie auch den Schritt der Interpretation mathematischer Ergebnisse.

Bei anderen Stationen (wie zum Beispiel „Gleichdicks“ oder „Ziegenproblem“) bieten virtuelle Modelle die Möglichkeit zur Verallgemeinerung und Erweiterung gefundener Sachverhalte. Bei der Station „Gleichdicks“ bedeutet dies etwa, dass die Lernenden geometrische Zusammenhänge, die sie an gegenständlichen Modellen (notwendigerweise spezieller) regelmäßiger Gleichdicks erarbeitet haben mit Hilfe der virtuellen Darstellung auf (allgemeine) unregelmäßigen Gleichdicks übertragen und dort untersuchen können.

#### **4. Ausblick – Arbeitsweisen von Lernenden**

Abschließend soll ein erster empirischer Ausblick auf die tatsächlichen Arbeitsweisen von Schülerinnen und Schülern gegeben werden: Wie nutzen sie Modelle eigenständig bei der Bearbeitung von Aufgabenstellungen im Mathematik-Labor?

In Abb. 3 wird hierfür die Analyse des Arbeitshefts der Station „Scheibenwischer“ (graue Balken) vom empirisch erfassten Vorgehen einer Schülergruppe (schraffierte Bereiche) überlagert. Auf den ersten Blick erscheint es, als ob die Lernenden im Wesentlichen den Vorgaben des Arbeitsheftes folgen, in einigen Teilaufgaben jedoch auch davon abweichen.

Betrachten wir diese Abweichungen im Detail für Aufgabe 2.7; sie ist zentral für die mathematische Durchdringung des Phänomens, da hier ein mathematisches Modell des Wischfeldes durch die Lernenden formuliert werden soll. Die Gruppe agiert hier nicht – wie im Aufgabenheft vorgeschlagen – ausschließlich in der mathematischen Welt, sondern nutzt zunächst das virtuelle Modell zur Betrachtung von Grenzfällen; auf diese Weise erfassen die Lernenden Teilaspekte des mathematischen Modells („Muss irgendwas mit

Mal sein“, „Wenn es null ist, muss auch null rauskommen“). Ihre anschließend erarbeitete eigene Formel validieren und modifizieren sie einige Male anhand von konkreten Werten aus der Simulation.

Bemerkenswert ist fernerhin, dass einzelne Lernende in anderen Arbeitsphasen neben gegenständlichen, mathematischen oder virtuellen Modellen eigene Erfahrungen aus Realsituationen, also gleichsam „individuelle Realmodelle“, in den Bearbeitungsprozess einbringen („Beim normalen Auto ist das ja nicht so beim Scheibenwischer“ oder „Das ist so ähnlich wie bei ner Eisenbahn“). Somit könnte eine Erweiterung des 3-Welten-Schemas um eine 4. Spalte, die Erfahrungswelt, nützlich sein.

Aufg.	Modell		
	gegenständlich	mathematisch	virtuell
1.1	BM I a		
1.2	X >		
1.3	X >		
1.4	BM II		
1.5			
1.6			
1.7			
2.1	BM I b	X >	
2.2		<	X VM I
2.3		< X	
2.4		<	X
2.5	X >		
2.6		X >	
2.7		< X	
2.8			
2.9			
2.10		< X	
3.1			X VM II
3.2			X
3.3			X
3.4			X
3.5			X

**Abb. 3:** 3-Welten-Analyse Vergleich Aufgabenheft – Arbeitsweisen von SchülerInnen bei der Station Scheibenwischer

## 5. Zusammenfassung

Die im Mathematik-Labor verwendenden Aufgabenhefte geben verschiedene Wege der Nutzung von Modellen vor. Die enge Führung in Verbindung mit der Darreichung von gegenständlichen, mathematischen oder virtuellen Modellen erlaubt es, Teilschritte des mathematischen Modellierens explizit anzuleiten und zu unterstützen. Im Vergleich zwischen den intendierten Arbeitsweisen durch die Aufgabenhefte und realen Bearbeitungen deutet sich an, dass die Lernenden die vorhandenen Modelle eigenständig und flexibel nutzen – und sich dabei auch von der Führung durch die Hefte lösen.

## Literatur

- Appell, K.; Roth, J.; Weigand, H.-G. (2008): Experimentieren, Mathematisieren, Simulieren – Konzeption eines MATHEMATIK-Labors. In: Vásárhelyi (Hrsg.): *BzMu*. Hildesheim: Franzbecker, 315–318
- Beck, J.; Wörler, J. F. (2017): Im Unterricht mit Modellen experimentieren. In U. Kortenkamp & A. Kuzle (Hrsg.): *BzMu*. Münster: WTM-Verlag, 1448–1450
- Blum, W.; Leiß, D. (2005): Modellieren im Unterricht mit der „Tanken“-Aufgabe. *mathematik lehren* 128, 18-21
- Siller, H.-St.; Greefrath, G. (2010): Mathematical modelling in class regarding to technology. In V. Durand-Guerrier et al. (Hrsg.): *Proceedings of the Sixth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education*. 2136–2145