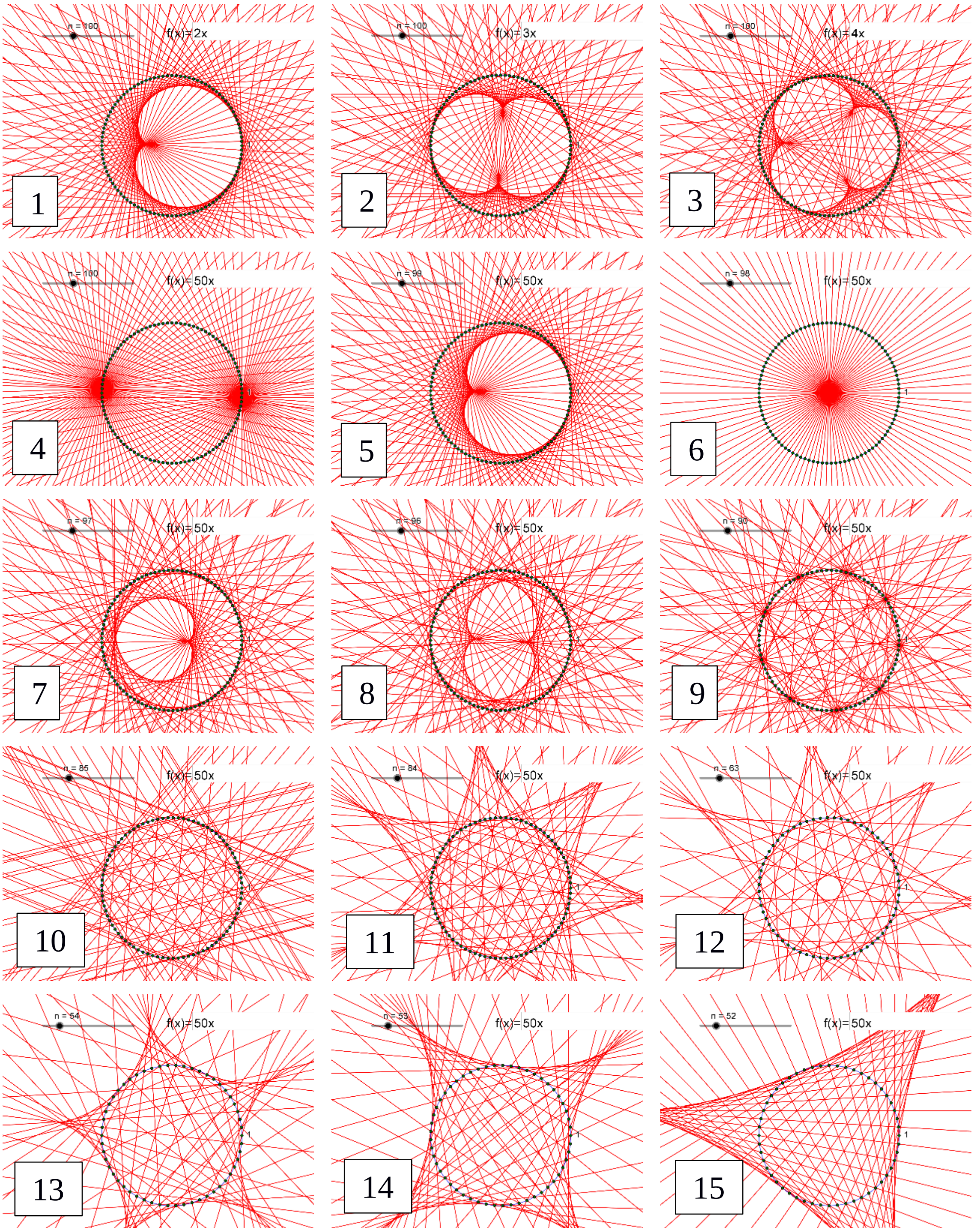
Stephan BERENDONK, Essen

Kardioidenjagd – Vom Sammelsurium zum Satz

Erkunden, Experimentieren, Entdecken, Spielen, Variieren, Beobachten, Vorhersagen, Prüfen, (modulo) Rechnen und Beweisen. Auf diese bunte Sammlung von Tätigkeiten folgt nun ein Sammelsurium von Bildern:

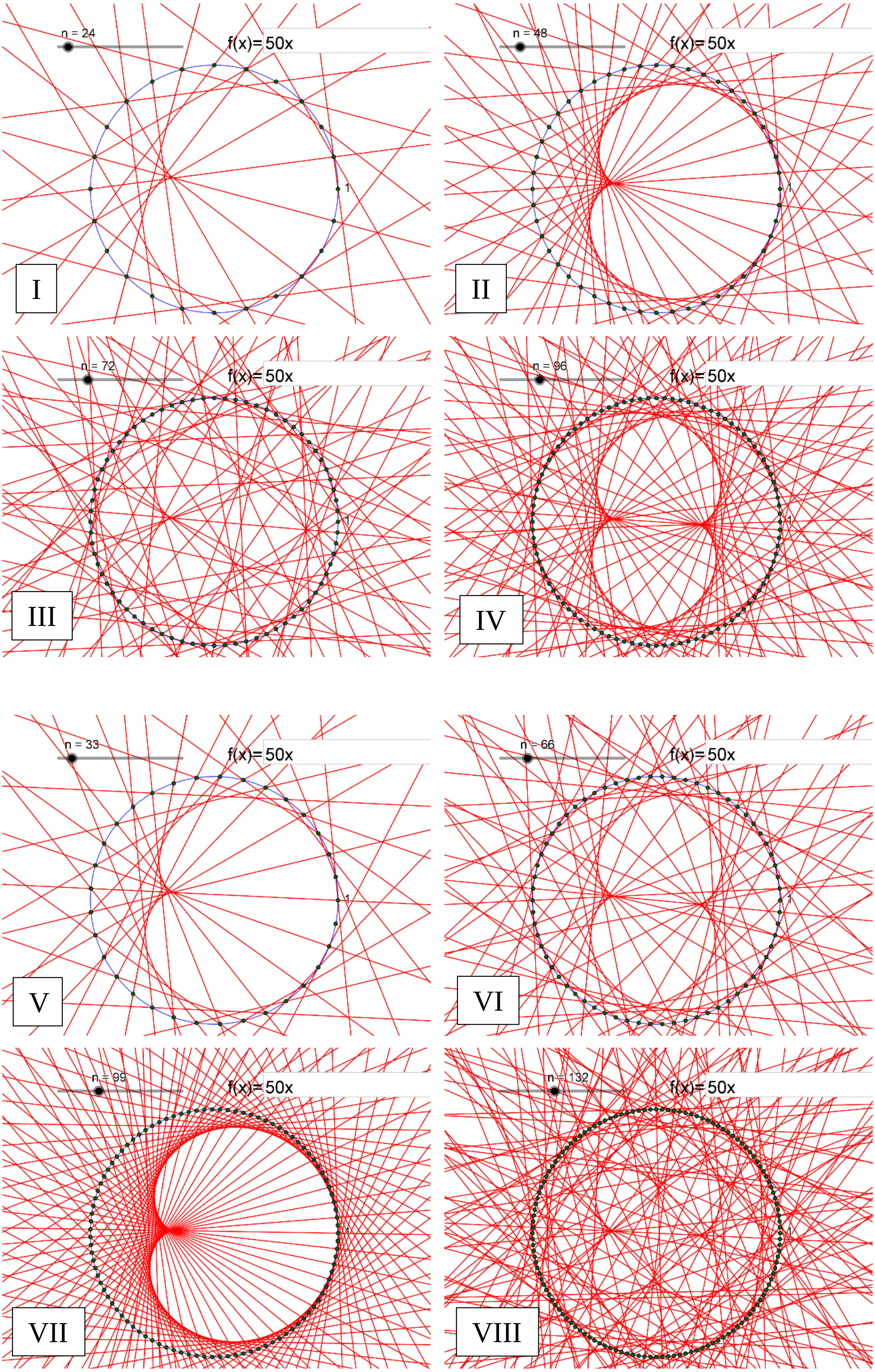
Das Sammelsurium



Die Bilder habe ich mit einem Applet erstellt. Das Applet verlangt die Wahl einer natürlichen Zahl n und eines polynomialen Terms $f(x)$ in x mit ganzzahligen Koeffizienten. Dann erzeugt es ein regelmäßiges n-Eck, nummeriert dessen Ecken in mathematisch positivem Drehsinn und zieht von jeder Ecke, deren Nummer sei m, eine Gerade zu der Ecke deren Nummer gleich dem Rest von $f(m)$ bei Division durch n ist. Falls dieser Rest jedoch m selbst ist, so entfällt die Gerade. Ich entschied mich zunächst für $n = 100$ und $f(x) = 2x$ (Bild 1), $f(x) = 3x$ (Bild 2) und $f(x) = 4x$ (Bild 3). Obwohl das Applet keine Kurven, sondern nur ein paar Geraden zeichnet, erkenne ich drei klassische Kurven: in Bild 1 eine Kardioide, in Bild 2 eine Nephroide und in Bild 3 eine Epizykloide mit drei Spitzen (Bild 3). Wer mit den Hüllkurvenerzeugungsweisen dieser Kurven vertraut ist, den wird das nicht wundern. Klar, für $f(x) = kx$ wird man allgemein eine Epizykloide mit $k - 1$ Spitzen erhalten. Ich prüfte diese Behauptung für $n = 100$ und $k = 50$ (Bild 4). Überraschung! Von einer Kurve mit 49 Spitzen keine Spur. Vielleicht ist ja das n irgendwie ungünstig gewählt. Ich probierte daher $n = 99$ und $k = 50$ (Bild 5). Große Überraschung! Erneut eine Kardioide! Wie kann das sein? Ich variierte nun n und traf dabei auf weitere Phänomene: eine Sonne (Bild 6, $n = 98$), eine herzartige Kurve (Bild 7, $n = 97$), eine „Acht“ (Bild 8, $n = 96$), „Büschel“ (Bild 9, $n = 90$), parallele Geraden (Bild 10, $n = 85$), ein Stern mit Geraden durchs Zentrum (Bild 11, $n = 84$), ein Stern ohne Geraden durchs Zentrum (Bild 12, $n = 63$), eine Hypozykloide mit 5 Spitzen (Bild 13, $n = 54$), eine Astroide (Bild 14, $n = 53$) und eine Deltoide (Bild 15, $n = 52$). Die Phänomenologie rief Fragen und Vermutungen hervor: Wie steht es mit der herzartigen Kurve? Gehört auch sie zu den Epizykloiden? Und die „Acht“ in Bild 8? Wann treten „Büschel“ auf? Hat ihre Anzahl und Größe etwas mit dem ggT von n und k zu tun? Wann treten parallele Geraden auf? Spielt der ggT von n und $k + 1$ hierbei eine Rolle? Und sind es stets gleich viele Geraden in jede auftretende Richtung?

Die Kardioidenjagd

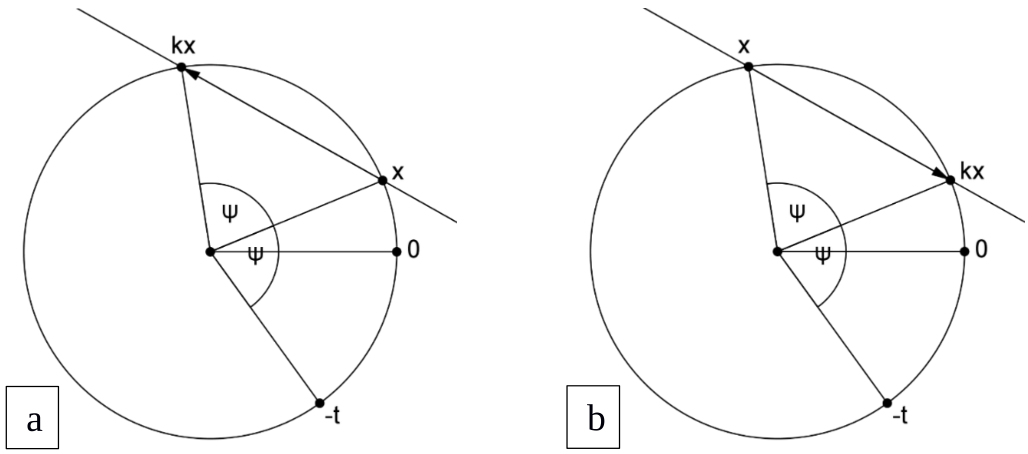
Das Auftreten einer Kardioide bei $f(x) = 2x$, also bei $k = 2$, lag auf der Hand, schließlich ist die Kardioide, gelehrt gesprochen, die Katakaustik eines Kreises bezüglich eines Punkts auf dem Kreis. Ich war jedoch überrascht, eine Kardioide bei $f(x) = 50x$, also bei $k = 50$, anzutreffen. Bei der Variation von n stellte sich dann heraus, dass $n = 99$ nicht die einzige Kardioide bei $k = 50$ bleiben sollte. Bei $n = 24$ (Bild I auf der folgenden Seite), $n = 48$ (Bild II), $n = 33$ (Bild V) und $n = 99$ (Bild VII) traf ich weitere Exemplare an. Nun ist 48 das Doppelte von 24 und 99 das Dreifache von 33. Das schien mir irgendwie verdächtig, und so nahm ich die Vielfachen von 24 und 33 genauer in den Blick. Bei $n = 66$ (Bild VI) erhielt ich wieder die „Acht“.


n = 24
f(x)= 50x
I
n = 48
f(x)= 50x
II
n = 72
f(x)= 50x
III
n = 96
f(x)= 50x
IV
n = 33
f(x)= 50x
V
n = 66
f(x)= 50x
VI
n = 99
f(x)= 50x
VII
n = 132
f(x)= 50x
VIII

Der „Acht“ war ich zuvor bei $n = 96$ (Bild IV), also beim Vierfachen von 24 begegnet. Was hat die „Acht“ bloß mit den Kardioiden zu tun, fragte ich mich, und diese Frage öffnete mir zugleich die Augen. Was ich als „Acht“ interpretierte, waren in Wirklichkeit zwei kongruente ineinander verschlungene Kardioiden! Mit diesem nun besser geschulten Blick erkannte ich bei $n = 72$ (Bild III), also beim Dreifachen von 24, drei, und bei $n = 132$ (Bild VIII), also beim Vierfachen von 33, vier jeweils zueinander kongruente und symmetrisch ums Zentrum angeordnete Kardioiden. Unklar blieb, wie diese Beobachtungen zusammenpassen könnten. Wie bestimmt man zu gegebenen n und k die Anzahl der Kardioiden? Anstatt weitere Daten zu erheben und dabei nach Indizien zu suchen, wählte ich nun einen deduktiven Zugang.

Der Beweis:

Eine Verbindungsgerade der Ecken x und kx $(mod\ n)$ ist Tangente einer an der Ecke $-t$ $(mod\ n)$ ausgerichteten Kardioide, falls sie die Situation in Bild a oder in Bild b erfüllt, d.h. einer der beiden folgenden Gleichungen genügt: $kx + t \equiv 2 \cdot (x + t)\ \big(mod\ n\big)$ oder $2 \cdot (kx + t)\ \equiv x + t\ \big(mod\ n\big)$. Nach t aufgelöst, lautet die erste Gleichung wie folgt: $(k - 2) \cdot x \equiv t\ \big(mod\ n\big)$. Der linke Term nimmt bei Variation von x genau $n/ggT(n, k - 2)$ verschiedene Werte t an und bestimmt jeweils genau eine gemäß t ausgerichtete Kardioide. Löst man die zweite Gleichung nach t auf, so erhält man: $-(2k - 1) \cdot x \equiv t\ \big(mod\ n\big)$. Der linke Term nimmt hier $n/ggT(n, 2k - 1)$ verschiedene Werte an. Ergebnis dieser Betrachtungen ist nun der folgende Satz:



Der Satz: „Eine Kardioide kommt selten allein!“

Die zu n und $f(x) = kx$ gehörende Graphik besteht gleichzeitig aus Tangenten an $n/ggT(n, k - 2)$ und an $n/ggT(n, 2k - 1)$ kongruente Kardioiden. Einer Kardioide, die alle gezeichneten Geraden berührt, begegnet man, sofern n ein Teiler von $k - 2$ oder von $2k - 1$ ist.