

Aufgaben werden zu Aufgaben

1. Flexibles Handeln

Aufgaben im Mathematikunterricht dienen u. a. dazu, Erkenntnisprozesse anzuregen oder Verfahren und Routinen im Umgang mit mathematischen Objekten zu üben. Bei verfahrens- und kalkülorientierten Aufgaben besteht hinsichtlich der Routinebildung die Gefahr, dass das Verständnis für die Tätigkeit oder die mathematischen Inhalte verlorenght (Büchter, Leuders 2005). Freudenthal (1983, S. 469) bezeichnet eine weitgehende Orientierung an Routinen sogar als didaktischen Fehler: „The didactical mistake resides in the principle of once learning by insight, and then irrevocably going forward to the automatisms.“ Arcavi, Drijvers und Stacey (2017) sehen auch im Bereich von Routineaufgaben die flexible Nutzung von Verfahren als Kern algebraischer Fähigkeiten an. Schülerinnen und Schüler sollten also in der Lage sein, Routinen nicht unreflektiert oder gar unverstanden, sondern in Abhängigkeit von der gestellten Aufgabe sinnvoll und effizient einsetzen zu können. Hierfür ist flexibles Handeln notwendig, das in Anlehnung an den Begriff des flexiblen Rechnens im Bereich der Arithmetik (Rathgeb-Schnierer 2006) als die Wahl einer adäquaten Bearbeitungsmethode verstanden werden kann, die von den spezifischen Aufgabenmerkmalen und den Mitteln des Lernenden abhängig ist (Block 2016). Als wesentliche Voraussetzung für flexibles Handeln ergibt sich damit die Fähigkeit, Aufgabenmerkmale wahrzunehmen und ihnen Bedeutungen im Kontext der Bearbeitung der Aufgabe zuzuweisen.

2. Metaaufgaben zur Förderung flexiblen Handelns

Um die Reflexion spezifischer Aufgabenmerkmale anzuregen, bedarf es geeigneter Aufgabenstellungen, die auf die Merkmale von Aufgaben fokussieren. Da diese Aufgabenstellungen eine Auseinandersetzung mit den zu lösenden Aufgaben auf einer Metaebene erfordern, werden sie als Metaaufgaben bezeichnet. Metaaufgaben beschäftigen sich mit einer Menge von Aufgaben (Primäraufgaben), die in einem für den Lernenden erkennbaren Zusammenhang stehen. Der Zusammenhang wird über Gemeinsamkeiten und Unterschiede hergestellt. Hinsichtlich der Gemeinsamkeiten können dies ein gleicher Kontext (z. B. quadratische Gleichungen; Dreieckskonstruktionen) oder ein gemeinsames Merkmal (z. B. verschiedene Typen unlösbarer Gleichungen; Konstruktion verschiedener Figuren, bei denen jeweils eine Höhe gegeben ist) sein. Die Aufgabenstellung der Metaaufgabe konzentriert sich dann auf die Unterschiede der Primäraufgaben. Unter-

schieden werden kann in zwei Gruppen von Metaaufgaben: Analysierende Metaaufgaben, bei denen die Menge der Primäraufgaben gegeben ist und generierende Metaaufgaben, bei denen ausgehend von einer Primäraufgabe eine Menge von Aufgaben durch den Lernenden erzeugt wird (Block 2017).

3. Aufgabenformat „Sortieren“

Das Sortieren von (Primär-)Aufgaben als Metaaufgabe stellt ein ergiebiges Aufgabenformat dar. Abbildung 1 zeigt ein Beispiel für eine Sortieraufgabe zu quadratischen Gleichungen anhand dessen das Potenzial dieses Aufgabenformats diskutiert wird.

Schreibe die Gleichungen auf Kärtchen und schneide sie aus. Sortiere die Karten mit den Gleichungen. Nenne deine Kriterien und erläutere sie. Beachte: Es gibt mehrere Möglichkeiten, die Gleichungen zu sortieren.

| | | | | | | | |
|---|---------------------------|---|-------------------------------|---|-----------------------|---|----------------------|
| A | $-2x^2 = 3x^2 + 15x - 10$ | B | $x^2 + 4x = 0$ | C | $(x - 8)^2 = 0$ | D | $2x + x^2 - 10 = 0$ |
| E | $-10 = (x + 4)^2$ | F | $x^2 + x - 4 = 0$ | G | $x^2 = -16x - 64$ | H | $(x - 5)(x + 3) = 9$ |
| I | $6x^2 - 15 = 0$ | J | $x^2 = x$ | K | $5x^2 = -26$ | L | $(2x - 7)^2 = 20$ |
| M | $40 = 8x^2$ | N | $4x \cdot (3x + 12) = 0$ | O | $4x^2 + 16x + 20 = 0$ | P | $x^2 = 50$ |
| Q | $(x - 5)(x + 3) = 0$ | R | $(x + 3) = \frac{6}{(x - 9)}$ | S | $x^2 = -14$ | T | $x^2 + 9x - 20 = 16$ |

Abbildung 1

Ziel des Sortierens ist es, dass sich die Schülerinnen und Schüler intensiv mit den Merkmalen der Gleichungen und deren Relevanz für das Lösen der Gleichungen auseinandersetzen. Damit wird eine Basis für die Auswahl eines effizienten Lösungsverfahrens im Sinne flexiblen Handelns gelegt. Darüber hinaus wird das Aufgabenformat „Sortieren“ anderen wichtigen Ansprüchen des Mathematikunterrichts gerecht. Da sich insbesondere kalkül- bzw. verfahrensorientierte Routineaufgaben als Primäraufgaben eignen, werden Basiskompetenzen aktiviert. Durch die geforderten Begründungen für die Sortierungen bzw. die gewählten Kriterien werden die prozessbezogenen Kompetenzen „Argumentieren“ und „Kommunizieren“ explizit eingefordert. Das Aufgabenformat bietet ein großes Differenzierungspotenzial im Sinne selbstdifferenzierender Aufgaben. Es sind unterschiedliche individuelle Zugänge möglich und die Bearbeitung kann auf unterschiedlichen Niveaus hinsichtlich der Sortierkriterien und der Qualität der Begründungen für die Kriterien erfolgen. Für die Lehrkraft bietet das Aufgabenformat ein hohes diagnostisches Potenzial. Zunächst können Wissenslücken entdeckt werden, wenn die Schülerinnen und Schüler z. B. beim

Sortieren der obigen Gleichungen nicht auf das Faktorisieren als Lösungsweg eingehen. Auch Fehlvorstellungen werden erkennbar. So werden u. U. x und x^2 als zwei verschiedene Variablen in den quadratischen Gleichungen aufgefasst oder die auf einer Seite der Gleichung auftretende Zahl wird in einen fehlerhaften Zusammenhang mit der Lösung der Gleichung gebracht. Ungeeignete Schemata der Schülerinnen und Schüler können identifiziert werden. So ist das Ausmultiplizieren der in den Termen auftretenden Klammern bei den quadratischen Gleichungen in Abhängigkeit von anderen Merkmalen der Gleichung nicht immer ein effizient zielführendes Vorgehen, wird aber häufig von den Schülerinnen und Schülern unabhängig von sonstigen Merkmalen der Gleichung als notwendiger erster Umformungsschritt genannt (Block 2016).

Die Sortierungen und die Begründungen für die Kriterien sollten von den Schülerinnen und Schülern schriftlich festgehalten werden. So können sie als Ausgangspunkt der Gestaltung eines weiteren Lernprozesses dienen. Hierzu eignen sich u. a. die folgenden Aufgabenstellungen:

- Sortierungen, Sortierkriterien und deren Begründungen anderer Schülerinnen und Schüler überprüfen, begutachten und mit den eigenen Sortierungen und Begründungen vergleichen
- Kriterien und Begründungen zu Sortierungen anderer Schülerinnen und Schüler formulieren
- Zu jedem Kriterium weitere Aufgaben und Gegenbeispiele angeben
- Sortierungen im Hinblick auf die folgenden Fragestellungen untersuchen: Welche Kriterien sind im Hinblick auf das Lösen der Aufgaben (besonders) relevant? Welche Kriterien sind im Hinblick auf den Schwierigkeitsgrad der Aufgabe (besonders) relevant?

Das Sortieren bietet sich als Aufgabenformat auch als Einstieg in ein Thema an. So können die Schülerinnen und Schüler die o. g. quadratischen Gleichungen auch sortieren, wenn sie bisher nur lineare Gleichungen lösen können, aber schon mit Quadratwurzeln und irrationalen Zahlen vertraut sind. Ein Teil der quadratischen Gleichungen ist mit diesen Kenntnissen lösbar, wenn das Wissen und geeignete Verfahren entsprechend adaptiert werden. Übrig bleiben dann die Fälle, die nur mit quadratischer Ergänzung zu bewältigen sind. Das Sortieren kann dann als Anstiftung für die Entwicklung eines Lösungsverfahrens für die übrig gebliebenen Fälle dienen. In einer Reflexion des Lernprozesses zu quadratischen Gleichungen kann bei einer erneuten Sortierung später verglichen werden, welche Kriterien zu beiden Zeitpunkten berücksichtigt wurden und welche Kriterien jeweils zusätzlich auftraten oder nicht verwendet wurden.

Da das Sortieren von Aufgaben für Schülerinnen und Schüler zunächst meist ungewohnt ist, kann methodisch strukturiert an diesen Aufgabentyp herangeführt werden. Vor dem selbstständigen Formulieren von Sortierkriterien bieten sich die folgenden Schritte für einen Zugang an:

- Rekonstruktion von Kriterien zu vorgelegten Sortierungen
- Formulierung von Bedeutungen zu Kriterien vorgelegter Sortierungen
- Sortieren nach vorgegebenen Kriterien.

Das selbstständige Finden von Sortierkriterien bildet dann den Kern von Sortieraufgaben. Auch hier kann zunächst methodisch strukturiert durch die folgende Schrittfolge vorgegangen werden:

- Auswahl von drei Aufgaben, von denen zwei eine Gemeinsamkeit besitzen, über die die dritte Aufgabe jedoch nicht verfügt
- Formulierung der Gemeinsamkeit als Kriterium
- Wiederholung der ersten beiden Schritte, bis keine weiteren Kriterien auf diese Art gefunden werden
- Sortierung der Aufgaben nach den formulierten Kriterien.

Bei der Auswahl von Primäraufgaben ist darauf zu achten, dass es stets mehrere Möglichkeiten für Sortierungen gibt und diese auch Schnittmengen aufweisen können, sodass die Sortierungen nicht immer eindeutig sind. Je vielfältiger die Möglichkeiten sind, desto reichhaltiger können die Lernprozesse sein, die beim Sortieren ausgelöst werden.

Literatur

- Arcavi, A., Drijvers, P. & Stacey, K. (2017). *The Learning and Teaching of Algebra. Ideas, Insights, and Activities*. Abingdon: Routledge.
- Block, J. (2016). Flexible algebraic action on quadratic equations. In: K. Krainer & N. Vondrová (Hrsg.), *Proceedings of the ninth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education*. Prag: Charles University, ERME. 391-397.
- Block, J. (2017). Aufgabenformate zur Förderung des Erkennens von Strukturen im Kontext algebraischen Denkens. In: Institut für Mathematik der Universität Potsdam (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2017*. Münster: WTM. 1207-1210.
- Büchter, A., Leuders, T. (2005). *Mathematikaufgaben selbst entwickeln. Lernen fördern - Leistung überprüfen*. Berlin: Cornelsen.
- Freudenthal, H. (1983). *Didactical Phenomenology of Mathematical Structures*. Dordrecht: Kluwer.
- Rathgeb-Schnierer, E. (2006). *Kinder auf dem Weg zum flexiblen Rechnen*. Hildesheim: Franzbecker.