Claudia BÖTTINGER, Essen

Differenzierung in Mathematik-Veranstaltungen mithilfe von Lernumgebungen am Beispiel „Einführung in die mathematische Logik“

1. Ausgangslage

Seit einiger Zeit wird an der Universität Duisburg-Essen die Veranstaltung „Einführung in die mathematische Logik“ angeboten, eine zweistündige Vorlesung mit angegliederter zweistündiger Übung. Es ist eine Veranstaltung des sogenannten Ergänzungsbereichs und wird für Studierende der Wirtschaftswissenschaften im Bereich „Allgemeinbildende Grundlagen des Fachstudiums“, für Mathematik-Studierende im Bereich „Schlüsselkompetenzen“ und für alle sonstigen Studierenden im Bereich „Studium liberale“ angeboten.

2. Besonderheiten der Logik

Die formale Logik ist eine Theorie formaler Systeme mit einer Tradition, die bis auf Aristoteles zurückgeführt wird. Ihr Gebiet umfasst verschiedene Fragestellungen wie Beweisen und Beweisbarkeit, Klassifikation von Modellen für Axiomensysteme, Aufbau von Mengen und damit verbunden die Konstruktion von Ordinal- und Kardinalzahlen, Berechenbarkeit und ihre Grenzen usw. Die mathematische Logik lebt von einer klaren Trennung zwischen dem formalen Kalkül, der Syntax, und der Semantik, den „konkreten mathematischen Strukturen“, über die Sätze bewiesen werden können. Verbunden damit sind viele neue Notationen, weil immer unterschieden werden muss, ob man sich auf der Ebene der Syntax oder der Semantik bewegt. Wegen des hohen Abstraktionsgrades der Logik und der großen Heterogenität der Studierenden lohnt sich ein Blick in die Lehrerbildung, wo z. B. im Hinblick auf das Fach Lineare Algebra vergleichbare Probleme diskutiert werden, etwa in (Beutelspacher, Danckwerts, Nickel, Spies, & Wickel, 2011).

Im Einzelnen werden dort folgende Aspekte berücksichtigt

- eine genetische Orientierung,
- eine besondere Rolle der Elementarmathematik,
- der wissenschaftliche Charakter,
- die Verzahnung von Schul- und Hochschulmathematik.

Überträgt man diese Aspekte auf die Logik, so bedeutet die genetische Orientierung, aufzuzeigen, wie sich Begriffe entwickelt haben, auch historisch.

D. h. die Veranstaltung beginnt mit einem historischen Überblick über die Logik, bei vor allem herausgearbeitet wird, wie sich einerseits die Idee des Schließens und andererseits die Idee der strikten Trennung zwischen Syntax und Semantik entwickelt hat. Soweit möglich, wird im Laufe der Veranstaltung immer wieder darauf verwiesen.

Im Rahmen der größeren Rolle von Elementarmathematik geht es darum, dass eine explizite Verbindung hergestellt wird zwischen den Konzepten der Mathematik, die in der Regel kompakt und schlüssig dargestellt werden, und den mathematischen Phänomenen, die damit organisiert werden. Wegen der besonderen Studierendengruppe muss diese Elementarmathematik explizit eingeführt werden. Im Augenblick sind dies Dualzahlen, der Körper $\mathbb{Z}_2$, Relationen und Funktionen, Graphen und Mengen. Diese Strukturen sind aus Hochschulperspektive elementar, lassen sich anschaulich erklären und die Bedeutung für die Mathematik allgemein und für die Logik speziell lässt sich gut herausstellen.

Beim wissenschaftlicher Charakter der Mathematik geht es (Beutelspacher, Danckwerts, Nickel, Spies, & Wickel, 2011, S. 11) vor allem um die Bedeutung im Rahmen der Lehrerbildung. Diese Grundidee soll übertragen werden auf Studierende anderer Studiengänge als der Mathematik. Gerade im Bereich der optionalen Studien, in dem an der Universität Duisburg-Essen die akademische Allgemeinbildung angesiedelt ist, sollen Studierende exemplarisch erfahren, wie Mathematik arbeitet und auf welche Weise die Wahrheit einer mathematischen Aussage nachgewiesen wird. Dabei geht es ganz besonders um die Rolle der Beweise, die die diese Studierenden nicht kennen, und die gerade in der Logik in doppelter Hinsicht zentral ist. Auf der einen Seite steht das formale Beweisen in der Sprache der Logik auf der anderen Seite das Beweisen in mathematischen Strukturen, was Mathematik-Studierende seit dem ersten Semester trainieren.

Die Verzahnung von Schul- und Hochschulmathematik spielt in der Lehrerbildung selbstredend eine zentrale Rolle und sollte auch im Studium liberale eine Leitidee sein. Für die Veranstaltung Logik stellt dies im Augenblick die größte Herausforderung dar, weil man praktisch kaum an Beweise oder mathematische Strukturen anknüpfen kann. Im Augenblick bleibt die Sprache der Algebra aus der Mittelstufe, an die im Rahmen der Prädikatenlogik angeknüpft werden kann.

3. Umgang mit Heterogenität

Um den unterschiedlichen Voraussetzungen der Studierenden gerecht zu werden, wird angestrebt, ausgewählte Konzepte der Lernumgebungen wie sie in der Mathematikdidaktik diskutiert und bereits ab der Grundschule eingesetzt werden, soweit möglich auf die Logik anzuwenden (Hengartner, Hirt, & Wälti, 2007, Hirt & Wälti, 2008, Krauthausen & Scherer, 2014, Bruder, Linneweber-Lammerskitten & Reibold, 2015)

Wittmann (1998) hat als zentrale Aufgaben der Mathematikdidaktik einen Kern herausgearbeitet, der sicherlich auch für die Entwicklung hochschulmathematischer Veranstaltungen tragfähig ist. Inzwischen ist das Konzept der substantiellen Lernumgebungen deutlich ausgearbeitet worden und die Kriterien von unterschiedlichen Autoren differenziert beschrieben worden, z. B. (Hengartner, Hirt, & Wälti, 2007, S. 20). Die Autoren stellen u. a. heraus, dass sie über eine niedrige Eingangsschwelle verfügen müssen, strukturelle Entdeckungen auf verschiedenen Niveaus ermöglichen sollen und das Problemlösen, Darstellen und Begründen fördern sollen.

Übungsaufgaben zur Logik werden nun in unterschiedlichen Abstraktionsgraden – angepasst auf die jeweilige Studierendengruppe – gestellt.

Als Beispiel für dieses Vorgehen soll eine Aufgabe zum Kompaktheitssatz der Aussagenlogik dienen. Der Kompaktheitssatz besagt:

Eine (möglicherweise unendliche) Formelmenge ist erfüllbar genau dann, wenn sie endlich erfüllbar ist.

(Ebbinghaus, Flum, & Thomas, Einführung in die mathematische Logik, 2007, S. 93)

Eine traditionelle Übungsaufgabe dazu lautet:

Wenden Sie den Kompaktheitssatz an, um zu zeigen, dass jedes unendliche lineare Gleichungssystem über $\mathbb{Z}_2$ genau dann lösbar ist, wenn jedes endliche Subsystem lösbar ist.

Mathematikstudierende erhalten genau diese Aufgabenstellung. Für die übrigen gibt es Variationen, die der Idee der Lernumgebung entlehnt sind.

Vorangestellt werden folgende Aufgabenstellungen

- Gleichungssysteme mit zwei und drei Variablen über $\mathbb{R}$
- Lineare Gleichungssysteme mit zwei und drei Variablen über $\mathbb{Z}_2$
- Lösen endlicher LGS über $\mathbb{Z}_2$ mithilfe des Gauss'schen Algorithmus
- Übertragen einer linearen Gleichung über $\mathbb{Z}_2$ in eine aussagenlogische Formel

Von den oben angegebenen Aspekten für Übungsaufgaben lassen sich einige hier wiederfinden. Die Behandlung linearer Gleichungssysteme knüpft an die Schulmathematik an, die Nutzung von $\mathbb{Z}_2$ lässt sich der Elementarmathematik zuordnen (jedenfalls aus Sicht der Hochschulmathematik). Gleichungssysteme sind relevant in den unterschiedlichsten Anwendungsfächern und stellen eine der zentralen Leitideen in unterschiedlichen mathematischen Disziplinen dar. Die Erfüllbarkeit von Formelmengen ist ein zentraler Begriff der Logik – auch für Informatiker.

Analog lässt sich z. B. der Craigsche Interpolationssatz in abstrakter Form für Mathematikstudierende und mithilfe von Beispielen für die übrigen Studierenden als Aufgabe stellen.

Die Besprechung der verschiedenen Aufgabenteile erfolgt traditionell in den Übungen. Als Vorbereitung tragen die Studierenden ihre Ergebnisse gruppenweise zusammen wobei darauf geachtet wird, dass im Sinne eines Gruppenpuzzles jeder Kleingruppe Studierende unterschiedlicher Gruppen zugehören. Gerade diese Art der Besprechung liefert eine Rechtfertigung dafür, dass Mathematik-Studierende die Veranstaltung im Bereich der Schlüsselqualifikationen angerechnet bekommen.

Eine ausführliche Fassung dieses Beitrags erscheint in den Publikationen zum Hansekolloquium 2018.

Literatur

Beutelspacher, A., Danckwerts, R., Nickel, G., Spies, S., & Wickel, G. (2011). *Mathematik neu denken - Impulse für die Gymnasiallehrerausbildung an Gymnasien.* Wiesbaden: Vieweg+Teubner Verlag.

Bruder, R., Linneweber-Lammerskitten, H., & Reibold, J. (2015). Individualisieren und differenzieren. In R. Bruder, L. Hefendehl-Hebeker, B. Schmidt-Thieme, & H.-G. Weigand (Hrsg.), *Handbuch der Mathematikdidaktik* (S. 513-538). Berlin, Heidelberg: Springer Spektrum.

Ebbinghaus, H.-D., Flum, J., & Thomas, W. (2007). *Einführung in die mathematische Logik.* Berlin [u. a.]: Spektrum.

Hengartner, E., Hirt, U., & Wälti, B. (2007). *Lernumgebungen für Rechenschwache bis Hochbegabte: natürliche Differenzuierung im Mathematikunterricht.* Zug: Klett und Balmer.

Hirt, U., & Wälti, B. (2008). *Lernumgebungen im Mathematikunterricht: natürliche Differnzierung für Rechenschwache bis Hochbegabte.* Seelze-Belber: Klett/Kallmeyer.

Krauthausen, G., & Scherer, P. (2014). *Natürliche Differenzierung im Mathematikunterricht: Konzepte und Praxisbeispiele aus der Grundschule.* Seelze: Klett/Kallmeyer.

Wittmann, E. C. (1998). Design und Erforschung von Lernumgebungen als Kern der Mathematikdidaktik. *Beiträge zur Lehrerbildung,* 16(3), S. 329-342.