

Vanessa BRÄUER, Dominik LEISS, Lüneburg &
Stanislaw SCHUKAJLOW, Münster

Erfolgreicher Modellieren mit Skizze? – Effekte des Zeichnens von Skizzen bei Modellierungsaufgaben zum Satz des Pythagoras und zu linearen Funktionen

Das Zeichnen einer Skizze ist eine anerkannte Strategie bei der Lösung von Textaufgaben. Bisher ist jedoch unklar, inwiefern sich die Strategie speziell bei der Durchführung mathematischer Modellierungsprozesse als hilfreich erweist und welche Faktoren für die Wirkung ausschlaggebend sind. Im Beitrag wird eine Studie vorgestellt, die sich mit der Wirkung von Skizzen in Abhängigkeit vom mathematischen Inhaltsbereich am Beispiel „Satz des Pythagoras“ (SdP) und „Lineare Funktionen“ (LinFu) befasst. Schriftliche Schülerlösungen wurden im Hinblick auf den Einsatz von Skizzen und deren Wirkung auf die Modellierungsleistung quantitativ ausgewertet. Die Untersuchung fand im Rahmen des Forschungsprojekts LESTRAM (**L**ern**S**trategien im **M**athematik**U**nterricht, Projektleitung: D. Leiss, S. Schukajlow) statt, das sich mit dem Einsatz von Strategien bei Modellierungsprozessen befasst.

Skizzen beim mathematischen Modellieren

In Bezug auf mathematische Modellierungsprozesse liegen zur Wirkung von Skizzen bisher kaum empirische Evidenzen vor und diese sind zudem uneinheitlich. Während einige Studien gezeigt haben, dass selbsterstellte Skizzen einen positiven Effekt beim mathematischen Modellieren haben (Rellensmann et al. 2016), belegen andere ausbleibende oder negative Wirkungen (De Bock et al. 2003). Weitere Untersuchungen weisen darauf hin, dass die Unterschiede in der Wirkung der Strategie durch personen-, aufgaben- und darstellungsbezogene Faktoren bedingt sind, wie zum Beispiel die Genauigkeit der Skizze oder das Anforderungsniveau der Aufgabe (z.B. Van Essen & Hamaker 1990).

Das Skizzenzeichnen beim Modellieren wurde bislang nur in einzelnen mathematischen Inhaltsbereichen untersucht und es bleibt unklar, ob der Faktor „Inhaltsbereich“ einen Einfluss auf das Erstellen von Skizzen beim Modellieren hat. Dies ist jedoch maßgeblich für die Frage, ob die bisherigen Forschungsergebnisse nur in Bezug auf einen Inhaltsbereich gelten oder auf andere übertragbar sind. Für die vorliegende Untersuchung wurden beispielhaft die Inhaltsbereiche SdP und LinFu verglichen, da eine Studie von Schukajlow, Kolter und Blum (2015) darauf hinweist, dass sich der Nutzen der Skizze zwischen diesen Bereichen unterscheidet. Die Vermutung wird durch die Annahme unterstützt, dass sich Aufgaben zum SdP besser eignen, um

Skizzen zu erstellen, da es hier meist um statische Sachverhalte und Längen geht. Bei den LinFu dagegen ist das dynamische Wachstum ggf. auch abstrakter Größen der zentrale Gegenstand, der sich zeichnerisch nicht so intuitiv darstellen lässt (Ott 2016).

Es hat sich mehrfach gezeigt, dass die Genauigkeit der Skizze ein ausschlaggebendes Kriterium für deren Nützlichkeit darstellt. Dabei können (1.) die Vollständigkeit und Korrektheit der *Objekte und Relationen* in der Skizze und (2.) die Vollständigkeit und Korrektheit der *Werte* in der Skizze als zwei Kategorien für die Genauigkeit unterschieden werden (Ott 2016). Sofern man die Skizzengenauigkeit betrachten möchte, ist es Voraussetzung, dass überhaupt Skizzen gezeichnet werden. Da aufgrund der Erläuterungen zu den Themenbereichen angenommen werden kann, das insbesondere zu den LinFu kaum Skizzen erstellt werden, ist es unerlässlich, Lernende konkret dazu aufzufordern.

Daraus ergaben sich die folgenden Forschungsfragen:

1. Inwiefern unterscheidet sich die Häufigkeit und Genauigkeit der Skizzen zwischen den Inhaltsbereichen SdP und LinFu beim spontanen Zeichnen?
2. Inwiefern unterscheidet sich in Abhängigkeit der Inhaltsbereiche (SdP und LinFu) die Wirkung der Skizzenaufforderung auf die Häufigkeit und die Genauigkeit der Skizze?
3. Inwiefern unterscheidet sich die Wirkung der Skizzengenauigkeit auf die Modellierungsleistung zwischen den Inhaltsbereichen SdP und LinFu?

Methoden

Die Studie umfasst 169 Probandinnen und Probanden aus dem neunten Jahrgang einer Gesamtschule (Real- und Gymnasialkurse) und eines Gymnasiums. Die Teilnehmerinnen und Teilnehmer waren durchschnittlich 15,3 Jahre alt und ungefähr die Hälfte davon war weiblich (50,9%).

Es handelte sich bei der Studie um eine einmalige Erhebung im Paper-Pencil-Format mit einem zeitlichen Rahmen von 70 Minuten. Die Testpersonen wurden randomisiert zu einer Experimental- oder einer Kontrollgruppe zugewiesen, indem es zwei verschiedene Testheftformate gab. Das Untersuchungsinstrument stellte ein Leistungstest dar, der aus vier Teilen bestand. In drei der vier Testteile wurden Kontrollvariable erhoben: die allgemeine Modellierungsleistung, die innermathematische Kompetenz in Bezug auf den SdP und eine Facette mathematikspezifischen Lesens. Der vierte Teil umfasste sechs Modellierungsaufgaben, von denen drei zum Inhaltsbereich SdP und drei zu LinFu waren. In der Kontrollbedingung (Testversion

A) galt es, die Aufgaben zu bearbeiten, während bei der Experimentalbedingung (Testversion B) zusätzlich die Aufforderung gestellt wurde, eine Skizze zu zeichnen. Die Testteile weisen akzeptable Reliabilitäten auf. Bei der Modellierungsleistung in Bezug auf die LinFu wurde nur eine Reliabilität von Cronbachs $\alpha = .55$ erreicht, vermutlich weil die verwendeten Größen in den Aufgaben unterschiedlich abstrakt waren. Die schriftlichen Schülerlösungen wurden mittels qualitativer Inhaltsanalyse im Hinblick auf die Modellierungsleistung und die Skizzengenauigkeit von zwei geschulten Beurteilern geratet und es wurde eine gute Interraterreliabilität erreicht. Die Skalenreliabilität bei der Bewertung der Skizzengenauigkeit ist fragwürdig bis akzeptabel.

Aus der Kodierung der Lösungsprozesse und der Skizzen wurden anschließend Scores errechnet, um Analysen der Häufigkeiten und multiple lineare Regressionen durchführen zu können. Für die oben genannten Kategorien der Skizzengenauigkeit (Objekte/Relationen; Werte) ebenso wie für die Modellierungsleistung wurden je Aufgabe die Scores 0 (falsch/fehlend) und 1 (vollständig und korrekt) vergeben. Diese wurden über die drei Aufgaben je Themengebiet summiert, sodass sich ein Summenscore von 0 bis 3 für alle Bewertungskategorien ergab.

Ergebnisse und Diskussion

Bei Betrachtung der Häufigkeiten bestätigt sich in Bezug auf die erste Forschungsfrage zum spontanen Skizzenzeichnen die Erwartung: Beim SdP werden bei dem Großteil der Bearbeitungen Skizzen erstellt, bei den LinFu sind es dagegen fast gar keine. Bei der Skizzengenauigkeit zeigt sich ein ähnliches Verhältnis. Die Mittelwerte für die Vollständigkeit der Objekte und Relationen sowie für die Vollständigkeit der Werte liegen beim SdP deutlich über denen bei den LinFu. Lernende zeichnen somit beim SdP deutlich häufiger und auch wesentlich genauere Skizzen als bei den LinFu.

Durch die Skizzenaufforderung ist beim SdP ein minimaler Anstieg in der Skizzenhäufigkeit zu verzeichnen, während die Mittelwerte für die Genauigkeit geringfügig abfallen. Keine der Entwicklungen ist jedoch signifikant. Im Inhaltsbereich LinFu ist dagegen eine deutliche Steigerung der Skizzenhäufigkeit erkennbar. Ebenso kann ein signifikanter Anstieg der Mittelwerte für die Skizzengenauigkeit beobachtet werden. Die Skizzenaufforderung hat demnach einen deutlichen, positiven Effekt auf die Häufigkeit und Genauigkeit der Skizzen im Bereich LinFu.

Um die Wirkung der Skizzengenauigkeit auf die Modellierungsleistung zwischen den Inhaltsbereichen zu vergleichen, wurden multiple lineare Regressionen durchgeführt mit der jeweiligen Modellierungsleistung als abhängige

Variable. Die Skizzenkategorien sowie weitere Kontrollvariablen wurden als unabhängige Variablen einbezogen. Im Inhaltsbereich SdP ergab sich ein statistisch signifikanter Einfluss der innermathematischen Kompetenz und der Vollständigkeit der Objekte und Relationen auf die Modellierungsleistung. Bei den LinFu wurde unter Einschluss aller Variablen ein signifikanter Effekt der Note erkennbar. Darüber hinaus hat die Vollständigkeit der Objekte und Relationen einen nahezu signifikanten Einfluss. Die Ergebnisse zeigen, dass die Vollständigkeit und Korrektheit der Objekte und Relationen in der Skizze die Modellierungsleistung in beiden Inhaltsbereichen signifikant vorhersagt.

Die positive Wirkung, die selbsterstellten Skizzen zugesprochen wird (Hembree 1992), konnte auch in dieser Studie nachgewiesen werden. Die Ergebnisse deuten darauf hin, dass das spontane Skizzenverhalten stark zwischen verschiedenen Inhaltsbereichen variieren kann. Diese Differenzen können durch die Aufforderung, eine Skizze zu erstellen, nur bedingt reduziert werden. Weiterhin machen die Analysen deutlich, dass eine zunehmende Vollständigkeit und Korrektheit der Objekte und Relationen in der Skizze sowohl beim SdP als auch bei den LinFu einen positiven Effekt auf die Modellierungsleistung hat. Da das Trainieren von Strategien zu einer besseren Wirkung führt (Hembree 1992), soll in einer Folgestudie untersucht werden, inwiefern ein solches Training die angedeuteten Effekte verstärkt.

Literatur

- De Bock, D., Verschaffel, L., Janssens, D., Van Dooren, W., Claes, K. (2003): Do realistic contexts and graphical representations always have a beneficial impact on students' performance? Negative evidence from a study on modelling non-linear geometry problems. *Learning and instruction*, 13(4), 441-463.
- Hembree, R. (1992): Experiments and Relational Studies in Problem Solving: A Meta-Analysis. *Journal for Research in Mathematics Education*, 23(3), 242-273.
- Ott, B. (2016): *Textaufgaben grafisch darstellen. Entwicklung eines Analyseinstruments und Evaluation einer Interventionsmaßnahme*. Münster: Waxmann (Empirische Studien zur Didaktik der Mathematik, 28).
- Rellensmann, J., Schukajlow, S., Leopold, C. (2016): Make a drawing. Effects of strategic knowledge, drawing accuracy, and type of drawing on students' mathematical modelling performance. *Educational Studies in Mathematics*, 95(1), 53-78.
- Schukajlow, S., Kolter, J., Blum, W. (2015): Scaffolding mathematical modelling with a solution plan. *ZDM Mathematics Education*, 47(7), 1241-1254.
- Van Essen, G., Hamaker, C. (1990): Using self-generated drawings to solve arithmetic word problems. *Journal of Educational Research*, 83(6), 301-312.