Joachim BROMAND, Bonn

Wittgensteins Philosophie der Mathematik und Gödels Theorem

Einleitung

Ludwig Wittgenstein gilt aufgrund seiner Beiträge zur Sprachphilosophie (*Tractatus logico-philosophicus* und *Philosophische Untersuchungen*) und zur Erkenntnistheorie (*Über Gewissheit*) zu den bedeutendsten Philosophen des 20. Jahrhunderts. Seinen „Hauptbeitrag" sah Wittgenstein selbst aber, zumindest laut einer von ihm verfassten biographischen Notiz aus dem Jahre 1944, in der Philosophie der Mathematik (vgl. Monk (1990), S. 494). Wittgensteins Selbsteinschätzung steht dabei in deutlichem Kontrast zur Rezeption seiner Philosophie der Mathematik durch seine Zeitgenossen und die Nachwelt. Insbesondere Wittgensteins Bemerkungen über Gödels Theorem und seine tolerante Haltung gegenüber Widersprüchen zogen vehemente Kritik nach sich. In diesem Sinne schreibt etwa Michael Dummett: „[O]ther passages again, particularly those on consistency and Gödel's theorem, are of poor quality or contain definite errors" (Dummett (1964), S. 461). Ganz ähnlich bemerkt Kurt Gödel über Wittgensteins Bemerkungen zu Gödels erstem Unvollständigkeitstheorem: „As far as my theorem about undecidable propositions is concerned, it is indeed clear […] that Wittgenstein did not understand it (or pretends not to understand it). He interprets it as a kind of logical paradox, while in fact it is just the opposite, namely a mathematical theorem within an absolutely uncontroversial part of mathematics […]. Incidentally, the whole passage […] seems nonsense to me" (Kurt Gödel zit. nach Wang (1987), S. 49). Das Folgende versucht, die Grundzüge von Wittgensteins Philosophie der Mathematik zu skizzieren (vgl. dazu auch die Einleitung in Bromand (2018)); insbesondere soll dafür argumentiert werden, dass Gödels obige Einschätzung unberechtigt ist und Wittgensteins Sicht auf Gödels Theorem durchaus nachvollziehbar ist.

Grundzüge von Wittgensteins Philosophie der Mathematik

Ein zentraler Unterschied von Wittgensteins philosophischer Position etwa zu derjenigen Gödels besteht darin, dass Wittgenstein sog. *ontologisch realistische* Positionen – wie etwa den von Gödel vertretenen Platonismus – strikt ablehnt, denen zufolge mathematische Objekte wie Mengen oder Zahlen objektiv bzw. unabhängig von unserem kognitiven Apparat existieren. Entsprechend stellt Wittgenstein in seinen posthum veröffentlichten *Bemerkungen über die Grundlagen der Mathematik* (im Folgenden kurz:

In Fachgruppe Didaktik der Mathematik der Universität Paderborn (Hrsg.) Beiträge zum Mathematikunterricht 2018. Münster: WTM-Verlag

BGM) fest (BGM, I §168, S. 99): „Der Mathematiker ist ein Erfinder, kein Entdecker" [eines platonischen Reiches mathematischer Gegenstände; JB].

Wittgensteins eigene Position zur Frage, was wir mit mathematischen Sätzen ausdrücken, wenn wir denn kein platonisches Reich mathematischer Gegenstände beschreiben, kann am einfachsten am Beispiel arithmetischer Sätze verdeutlicht werden. Dazu ist es zunächst hilfreich, zwischen unseren umgangssprachlichen Quantoren *kein*, *ein*, *zwei*, *drei*, … und den (singulären) arithmetischen Termen **0**, **1**, **2**, **3**, … zu unterscheiden. Nach Wittgenstein legen wir die Regeln für den Gebrauch der Zeichen **0**, **1**, **2**, **3**, … fest (die arithmetischen Axiome), so dass er eine *Variante* des *Konventionalismus* befürwortet. Dabei legen wir die Regeln allerdings nicht willkürlich fest, vielmehr spiegeln die Regeln Regelmäßigkeiten in unserem Gebrauch der umgangssprachlichen Quantoren *kein*, *ein*, *zwei*, *drei*, … wider: **2 + 3 = 5** haben wir etwa festgelegt, da in der Regel das Hinzukommen von drei Objekten zu zwei Objekten zu fünf Objekten führt. **2 + 3 = 5** ist dabei aber weder eine Beschreibung dieses Sachverhalts noch wie bei Mill eine Art Verallgemeinerung entsprechender Sachverhalte. Im Falle von **2 + 3 = 5** spricht Wittgenstein daher von einem ‚zur Regel verhärteten Erfahrungssatz' (BGM, VI § 22, S. 324). Als stipulierte Regel gilt ein solcher Satz *a priori* und auch *notwendigerweise* in dem Sinne, dass er nicht durch empirische Erfahrung falsifizierbar ist (im Gegensatz zur Aussage, dass das Hinzutun von *drei* Objekten zu *zwei* anderen immer zu *fünf* Objekten führt). Mathematische Sätze sind demnach auch *unrevidierbar*, allerdings könnten sie sich bei Änderung der Regularitäten als unbrauchbar erweisen: „So lernen ja die Kinder bei uns rechnen, denn man lässt sie 3 Bohnen hinlegen und noch 3 Bohnen und dann zählen, was da liegt. Käme dabei einmal 5, einmal 7 heraus, (etwa darum weil, wie wir jetzt sagen würden, einmal von selbst eine dazu-, einmal eine wegkäme), so würden wir zunächst Bohnen als für den Rechenunterricht ungeeignet erklären. Geschähe das Gleiche aber mit Stäben, Fingern, Strichen und den meisten andern Dingen, so hätte das Rechnen damit ein Ende. ‚Aber wäre dann nicht doch noch 2 + 2 = 4?' – Dieses Sätzchen wäre damit unbrauchbar geworden" (BGM, I §37, S. 51f). Da die Regeln, die durch mathematische Sätze ausgedrückt werden, somit keineswegs arbiträr sind und empirische Regularitäten widerspiegeln, kann Wittgensteins Position allenfalls als ein *Grenzfall* des Konventionalismus erachtet werden.

Wittgenstein und Gödels Theorem

Aufgrund von Wittgensteins Ablehnung eines Reichs abstrakter Gegenstände kann die Wahrheit eines mathematischen Satzes auch nicht in seiner Übereinstimmung mit einer solchen mathematischen Wirklichkeit bestehen.

Im Gegensatz zum korrespondenztheoretischen Wahrheitsbegriff seines frühen Hauptwerks, des *Tractatus*, greift Wittgenstein in seinen späteren Schriften – insbesondere zur Philosophie der Mathematik – auf einen sog. deflationären Wahrheitsbegriff zurück, dem zufolge Wahrheit im Wesentlichen durch das auf Alfred Tarskis Arbeiten zur Semantik formaler Sprachen zurückgehende W-Schema definiert ist: „Was heißt denn, ein Satz ‚*ist wahr*'? ‚*p*' *ist wahr* = *p*. (Dies ist die Antwort.)" (BGM I, Anhang III-6, vgl. PU §136). Diesem Wahrheitsverständnis zufolge kann von einem Satz behauptet werden, er sei wahr, genau dann, wenn der Satz selbst behauptbar ist. Letzteres ist nach Wittgenstein der Fall, wenn der Satz beweisbar ist, so dass Wittgenstein mathematische Wahrheit (in einer Theorie) und Beweisbarkeit (in dieser Theorie) identifiziert: „‚In Russells System wahr' heißt […]: in Russells System bewiesen; und ‚in Russells System falsch' heißt: das Gegenteil sei in Russells System bewiesen" (BGM I, Anhang III-8). Genau diese Identifizierung von Wahrheit mit Beweisbarkeit verhindert, dass Wittgenstein die übliche Deutung von Gödels Theorem teilen kann, der zufolge dieses zeigt, dass es wahre, aber unbeweisbare Sätze gibt – so dass Wahrheit und Beweisbarkeit auf zwei grundverschiedene Dinge hinausliefen. Freilich ist Gödels Annahme eines kausal unwirksamen (und uns daher kognitiv wohl unzugänglichen) Reiches abstrakter Gegenstände, das Sätze unabhängig von unseren Beweisversuchen wahr oder falsch macht, ihrerseits erkenntnistheoretisch hochproblematisch und Gegenstand intensiver Kritik (vgl. etwa Benacerraf 1973).

Tatsächlich liefe aufgrund von Wittgensteins Identifikation von Wahrheit mit Beweisbarkeit der Gödelsatz *P* (der die eigene Unbeweisbarkeit behauptet) auf den sog. Lügnersatz hinaus (der von sich selbst sagt, er sei nicht wahr) und zöge das Lügnerparadox nach sich, *falls* der Satz für ein System wie das der *Principia Mathematica* in diesem selbst beweisbar *wäre*: „Nehmen wir an, ich beweise die Unbeweisbarkeit (in Russells System) von *P*; so habe ich mit diesem Beweis *P* bewiesen. Wenn nun dieser Beweis einer in Russells System wäre – dann hätte ich also zu gleicher Zeit seine Zugehörigkeit und Unzugehörigkeit zum Russell'schen System bewiesen. […] Aber hier ist ja ein Widerspruch! […]" (BGM I, Anhang III-11) Wittgensteins Einschätzung erklärt sich somit durch seine mathematikphilosophischen Grundüberzeugungen und stellt kein – wie in der eingangs zitierten Passage von Gödel behauptet – grobes Missverständnis dar.

Wittgenstein bemüht sich demgegenüber um eine im Rahmen seiner Konzeption rationale Rekonstruktion der Rede von „wahren, aber unbeweisbaren" Sätzen. Naheliegend ist es dabei, die Rede von „wahren, aber unbeweisbaren Sätzen" so zu verstehen, als werde *wahr* bzw. *beweisbar* hier in zwei Sinnen verwendet: „‚Kann es aber nicht wahre Sätze geben, die in diesem Symbolismus angeschrieben sind, aber in dem System Russells nicht beweisbar?' – ‚Wahre Sätze', das sind also Sätze, die in einem anderen System wahr sind, d. h. in einem anderen Spiel mit Recht behauptet werden können. Gewiss; warum soll es keine solchen Sätze geben; […] [E]in Satz, der nicht in Russells System zu beweisen ist, ist in anderm Sinn ‚wahr' oder ‚falsch', als ein Satz der ‚Principia Mathematica'" (BGM I, Anhang III-7). Dieser ‚andere' Sinn von Wahrheit könnte eben der sein, den auch die übliche Lesart von Gödels Theorem verwendet, nämlich *Beweisbarkeit im Rahmen der Metatheorie*. Die Annahme, Wittgenstein habe Gödels Theorem nicht verstanden, scheint damit unbegründet zu sein. Ungewöhnlich (aber keinesfalls absurd!) ist lediglich Wittgensteins These, Wahrheit im mathematischen Fall sei dasselbe wie Beweisbarkeit. Ebenso befremdlich ist, dass Wittgenstein bei der Diskussion von Gödels Theorem Möglichkeiten in Betracht zieht, die üblicherweise nicht diskutiert werden, wie die der Inkonsistenz der Arithmetik. Dass Wittgenstein solche Möglichkeiten erörtert, dokumentiert vor dem Hintergrund der Entwicklung parakonsistenter Logiken und inkonsistenter arithmetischer Systeme allerdings eher eine Form von Weitsicht als das von Gödel unterstellte Unverständnis. (Detailliert analysiert Priest (2004) Wittgensteins Überlegungen zu Gödels Theorem; dt. Übers. in Bromand (2018).)

Literatur

Benacerraf, P. (1973). Mathematical Truth. *The Journal of Philosophy*, 70, 661–680.

Bromand, J. (Hrsg.) (2018). *Wittgenstein und die Philosophie der Mathematik*. Hrsg. v. J. Bromand unter Mitarbeit von B. Reichardt. Münster: Mentis.

Dummett, M. (1959). Wittgenstein's Philosophy of Mathematics. *The Philosophical Review*, 68, 324–348. Zitiert nach dem Wiederabdruck in M. Dummett (1978). *Truth and other Enigmas* (S. 166–185). London: Duckworth.

Monk, R. (1990). *Ludwig Wittgenstein. The Duty of Genius*. London & New York: Vintage. Zitiert nach der dt. Übersetzung: R. Monk (1992). *Wittgenstein. Das Handwerk des Genies*. Stuttgart: Klett-Cotta.

Priest, G. (2004). Wittgenstein's Remarks on Gödel's Theorem. In M. Kölbel & B. Weiss (Hrsg.). *Wittgenstein's Lasting Significance* (S. 206–225). London & New York: Routledge. Deutsche Übersetzung in Bromand (Hrsg.) (2018).

Wang, H. (1987). *Reflections on Kurt Gödel*. Cambridge (MA) & London: MIT Press.

Wittgenstein, L. (BGM). *Bemerkungen über die Grundlagen der Mathematik*. Hrsg. von G. E. M. Anscombe, R. Rhees & G. H. von Wright. In Werkausgabe, Bd. 6, Frankfurt am Main: Suhrkamp 1989.

Wittgenstein, L. (PU). *Philosophische Untersuchungen*. Hrsg. von G. E. M. Anscombe, R. Rhees & G. H. von Wright. In Werkausgabe, Bd. 1, Frankfurt am Main: Suhrkamp 1989.