Michael BÜRKER & Frank LOOSE, Tübingen

‘Die Sprache der Natur ist die Mathematik‘ – Highlights aus der Geschichte unseres Weltbildes

Der Vortrag fand innerhalb der Sektion ‚Geschichte und Philosophie der Mathematik und des Mathematikunterrichts‘ statt. Wir nahmen die gemeinsame Tagung der beiden Verbände DMV und GDM zum Anlass, die Entwicklung der mathematischen Sprache bei der Beschreibung des Weltbilds so aufzubereiten, dass wenigstens in groben Zügen erkennbar wird, welch fundamentale Rolle die Mathematik bei dieser Beschreibung spielt. Dabei zieht sich der historische Bogen von der Berechnung des Erdumfangs durch Eratosthenes bis zur Relativitätstheorie Albert Einsteins. Wir haben folgende Gliederung vorgenommen:

1. Die Berechnung des Erdumfangs durch Eratosthenes (ca. 240 v. Chr.)
2. Entfernungsabschätzungen von Erde, Mond und Sonne in der Antike
3. Die Kopernikanische Wende
4. Galileis Gesetze zur Fallbeschleunigung
5. Die drei Keplerschen Gesetze
6. Newtons Mondrechnung
7. Bemerkungen zur Allgemeinen Relativitätstheorie

Aus didaktischer Sicht sind die beiden ersten Punkte thematisch nahe an der Geometrie der Sekundarstufe I. Insbesondere spielt bei (1) der Satz von der Gleichheit der Wechselwinkel an Parallelen und bei (2) der zweite Strahlensatz eine entscheidende Rolle. (4) bis (6) werden heutzutage der Schulphysik zugeordnet, während (7) aus der Schulmathematik und -physik herausfällt. Dieser Teil wurde von Frank Loose übernommen.

(1) erscheint oft als Aufgabe mit einem Modell der Erde als Kugel und der Voraussetzung, dass die Sonnenstrahlen alle untereinander parallel sind:

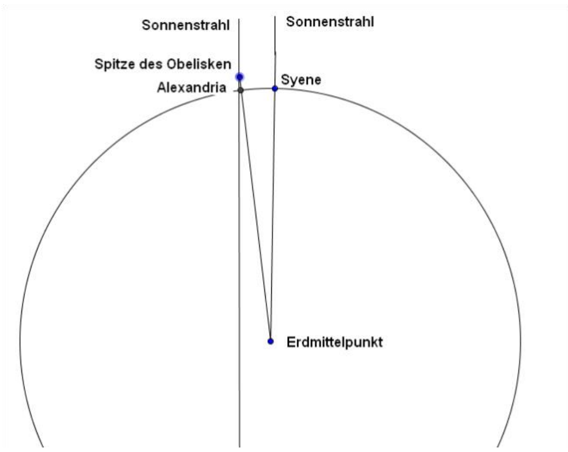

Abb. 1 (erstellt mit GeoGebra)

In Fachgruppe Didaktik der Mathematik der Universität Paderborn (Hrsg.) Beiträge zum Mathematikunterricht 2018. Münster: WTM-Verlag

Der Ort Syene liegt in Südägypten genau am Nördlichen Wendekreis. Daher steht dort die Sonne bei der Sommersonnenwende zur Mittagszeit genau im Zenit, während im etwa 800 km nördlich liegenden Alexandria die Sonnenstrahlen einen kleinen Winkel von 7,2° mit der Lotlinie bilden, wie **Eratosthenes** an einem hohen Obelisken maß. Dieser Winkel, der 1/50 des Vollkreises beträgt, tritt auch am Erdmittelpunkt zwischen den beiden Lotlinien durch Alexandria und Syene auf, so dass man nur die Entfernung von 800 km zwischen Alexandria und Syene mit 50 zu multiplizieren braucht, um den Erdumfang von etwa 40 000 km zu erhalten.

Wie genial die griechischen Naturphilosophen bei Entfernungsmessungen zwischen den Himmelskörpern Erde, Mond und Sonne vorgegangen sind, zeigt (2). Bekannt als Anwendung des zweiten Strahlensatzes dürfte die folgende Aufgabe sein: Wenn man am ausgestreckten Arm (Länge 66 cm) eine Erbse von 6 mm Durchmesser so vor den Vollmond hält, dass dieser gerade bedeckt wird, so ist nach dem 2. Strahlensatz das Verhältnis von *Mondentfernung zu Monddurchmesser* gleich dem Verhältnis *Armlänge zu Erbsendurchmesser* und damit gleich 110.

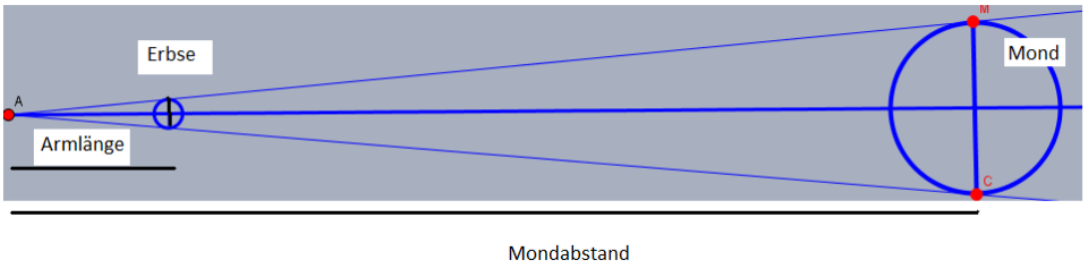

Abb. 2 (erstellt mit Cinderella)

Der Monddurchmesser kann mit Hilfe einer Mondfinsternis und des bekannten Erddurchmessers berechnet werden. Somit ergibt sich die Mondentfernung zu etwa 60 Erdradien.

Aristarch von Samos (3. Jahrhundert v. Chr.) ging noch einen Schritt weiter: Mit Hilfe der Halbmond-Stellung konnte er den Sonnenabstand ungefähr abschätzen, lag aber mit dem 20-fachen Mondabstand weit daneben. Trotzdem zog er aus dem viel zu kleinen Wert einen richtigen Schluss: Da Sonne und Mond am Himmel etwa gleich groß erscheinen, kann man wie beim Erbsenversuch den zweiten Strahlensatz auf eine Sonnenfinsternis-Stellung anwenden. Dabei kam er auf einen Sonnendurchmesser, der etwa dem 5-fachen Erddurchmesser entspricht, wonach die Sonne viel größer als die Erde ist: Dann, so schloss er, könne unmöglich die große Sonne um die viel kleinere Erde kreisen, es müsse vielmehr umgekehrt sein. Somit war er einer der ersten, wenn nicht der erste Heliozentriker der Weltgeschichte!

Für die Wende vom geo- zum heliozentrischen Weltbild bedurfte es noch mehr als anderthalb Jahrtausende und ist mit dem Namen **Nicolaus Copernicus** aufs engste verknüpft. Sein Hauptwerk ‚De revolutionibus orbium coelestium' wurde erst kurz vor seinem Tod 1543 veröffentlicht. Er musste nicht mehr befürchten, von der Inquisition belangt zu werden, mit der neunzig Jahre später **Galileo Galilei** seine Schwierigkeiten hatte. Der berühmte italienische Physiker wies dem Experiment eine Schiedsrichter- und der Mathematik eine Schlüsselrolle bei der Naturbeschreibung zu. Unter seinen vielen Entdeckungen waren für die Entwicklung des Weltbildes die Gesetze zur Fallbeschleunigung besonders wichtig. **Johannes Kepler** wiederum, Mathematiker, Astronom und Galileis Briefpartner, interpretierte die von Tycho Brahe genau ausgemessenen Planetenbahnen als Ellipsen, in deren einem Brennpunkt die Sonne steht. Dieses erste seiner drei Planetengesetze wurde zusammen mit seinem Flächensatz 1609 in seinem Werk ‚astronomia nova' veröffentlicht, während er sein drittes Gesetz über den mathematischen Zusammenhang von großer Halbachse und Umlaufzeit der Planeten wenige Tage vor dem Ausbruch des dreißigjährigen Krieges durch eine plötzliche Eingebung fand. Dieses dritte Gesetz, das sich in der Form $T^2 = Ca^3$ schreiben lässt (wobei T die Umlaufzeit eines Planeten, a seine große Halbachse und C eine für das Planetensystem charakteristische Konstante ist), sollte für Isaac Newton fünfzig Jahre später ein entscheidender Wegweiser zur Auffindung seines Gravitationsgesetzes werden.

Ein Jahr nach Galileis Tod wurde 1643 in Mittelengland **Isaac Newton** geboren. Er beschäftigte sich als junger Student in Cambridge mit Schriften bedeutender Mathematiker, welche Elemente der Infinitesimalrechnung enthielten. Wegen der 1664 in Cambridge ausgebrochenen Pest zog er sich auf das mütterliche Gut in Woolsthorpe zurück. Diese Zeit nutzte er, um u.a. seine Mondrechnung zu entwerfen. In ihr geht es darum, den Beweis dafür zu erbringen, dass die Anziehungskraft der Erde, welche den Mond auf seiner Bahn um die Erde hält, auch einen Apfel zu Boden fallen lässt. Dies gelang ihm, indem er in genialer Weise das Trägheitsgesetz, die mittels infinitesimaler Überlegungen entdeckte Formel $a = v^2/r$ für die Kreisbewegung (a = Zentripetalbeschleunigung, v = Bahngeschwindigkeit, r = Radius) und das 3. Keplersche Gesetz, das er auf die Mondbahn anwandte, mathematisch miteinander verband. Heraus kam, dass die Zentripetalbeschleunigung, die ein Stück Mondgestein erfährt, bezogen auf den Erdboden, genau der Fallbeschleunigung entspricht. Erst zwanzig Jahre später fasste er diese Erkenntnisse im Rahmen seiner Bewegungsgesetze zu dem Newtonschen Gravitationsgesetz zusammen: „Die Anziehungskraft zweier Punktmassen ist (dem Betrag nach) proportional zu deren Produkt und umgekehrt proportional zum Quadrat ihres Abstandes“ (veröffentlicht 1687 in dem Jahrtausendwerk ‚*Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*‘).

Diese Gravitationskraft, genauer das Gravitationspotential, welches eine Punktmasse im umgebenden Raum verursacht, stellt sich dabei als Lösung einer so genannten *partiellen* Differentialgleichung heraus, die auch von Newton stammt. Bei ihr wird eine Funktion in drei Veränderlichen gesucht, die gemäß diesem Gesetz eine Gleichung erfüllt, in der ihre partiellen Ableitungen zweiter Ordnung auftauchen. Das ebenfalls von Newton entdeckte Bewegungsgesetz, dass die Bewegung eines punktförmigen Körpers in diesem Feld gemäß $F = ma$ beschreibt, ist dagegen eine *gewöhnliche* Differentialgleichung, wo man drei Funktionen sucht, die die Bewegung des Körpers im Raum in Abhängigkeit der Zeit, also von nur einer Veränderlichen, beschreibt.

Ganz ähnlich ist es auch in der Allgemeinen Relativitätstheorie, die Albert Einstein erstmals im November 1915 vor der Preußischen Akademie der Wissenschaften vortrug. Hier verursacht beispielsweise ein Stern die Geometrie einer Raumzeit, die ebenfalls durch die Lösung einer partiellen Differentialgleichung, der Einstein’schen Feldgleichung, hervorgeht. Ein Körper in diesem „Gravitationsfeld“, welches nun durch die Geometrie gegeben ist, bewegt sich dann kräftefrei, dass heißt auf einer (zeitartigen) Geodätischen dieser Raumzeit, welches ebenfalls eine gewöhnliche Differentialgleichung ist. Die Newtonsche Gravitationstheorie lässt sich dann als ein Grenzfall der Einstein’schen Gravitationstheorie zurückerhalten.