

## Ein defragmentierendes Lehr-Lern-Format in der gymnasialen Lehrerbildung

### Probleme beim Übergang von Schule zur Hochschule

Tall (2008) stellte ein theoretisches Modell vor, das er die „Drei Welten der Mathematik“ nannte, um die Probleme in Mathematik beim Übergang von Schule zu Hochschule zu beschreiben (Abb. 1). Einen Grund für diese Probleme sieht Tall in der Existenz einer „axiomatic-formal“ Welt in der Universität und einer davon getrennten, „conceptual-embodied“ bzw. „proceptual-symbolic“ Welt in der Schule. Die „conceptual-embodied“ Welt beinhaltet dabei in der Realität erfasste Objekte und mentale Repräsentationen davon. Die „proceptual-symbolic“ Welt dreht sich um das Verwenden von Symbolen und das Auffassen dieser einerseits als Prozess und andererseits als Konzept. Die „axiomatic-formal“ Welt der Universität beschäftigt sich mit formalen, axiomatischen Definitionen, daraus abgeleiteten Aussagen und deren Beweisen. Dieses Modell kann einige Schwierigkeiten erklären, die viele Studierende beim Übergang von Schule zu Hochschule haben, z.B. das fehlende Erkennen von gemeinsamen Konzepten oder das fehlende Wissen über Zusammenhänge. Diese Probleme waren die Grundlage für unser neues Lehr-Lern-Format. Ziel war es, bekannten Konzepten aus der „conceptual-embodied“ und der „proceptual-symbolic“ Welt in die „axiomatic-formal“ Welt zu folgen, um den so wichtigen roten Faden erkennen zu lassen. Um diesen Konzepten besser folgen zu können, entschieden wir uns für eine Visualisierung der Zusammenhänge und der zeitlichen Entwicklung mit Hilfe von mathematischen Landkarten.

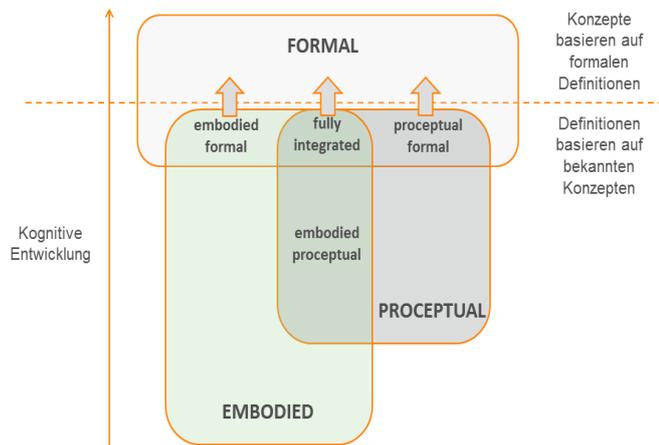
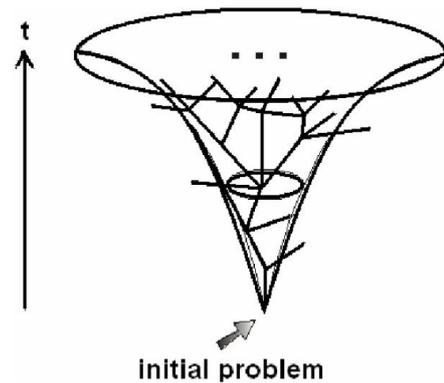


Abb. 1: Drei Welten der Mathematik (Tall, 2008)

### Interaktive mathematische Landkarten

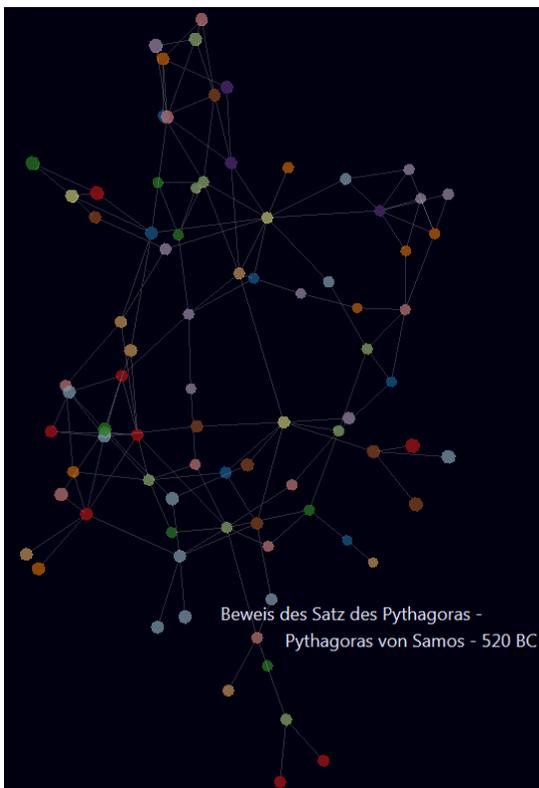
Das Konzept der mathematischen Landkarten wurde von Brandl (2008) als ein didaktisches Hilfsmittel zur Darstellung von Zusammenhängen und zeitlichen Entwicklungen eingeführt. Eine mathematische Landkarte ist ein virtueller Baum bzw. ein Netz, welches in der horizontalen Dimension die

Zusammenhänge verschiedener Themen zeigt und in der vertikalen Dimension die Entwicklung eines Themas zeigt – beginnend mit einem anfänglichen Problem. Eine schematische Darstellung ist in Abbildung 2 zu sehen. Diese Darstellung erlaubt es den Studierenden, die Entwicklung eines Problems im Zeitverlauf nachzuverfolgen und liefert viele Möglichkeiten, um vernetztes Denken zu fördern. Beispielsweise ermöglicht die Visualisierung in drei Dimensionen eine ideale Nachvollziehbarkeit der Zusammenhänge zwischen verschiedenen Themen und zwischen einzelnen Knoten. Einzelne Knoten können zusätzlich noch zu externen Materialien verlinkt werden.



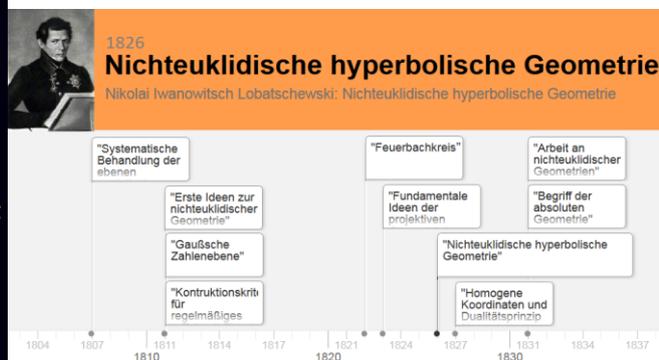
**Abb. 2:** Schematische Darstellung mathematische Landkarte

Ein anderes Konzept einer Landkarte der Mathematik stammt von Acevedo (2014). Seine „OpenMathMap“ ordnet verschiedene Themen der Mathematik der Größe nach an, je nachdem, wie viele Artikel in einem Bereich veröffentlicht wurden und wie stark zwei Gebiete zusammenhängen (S. 6f).



**Abb. 3:** Zusammenhänge zwischen Themen

Für das Lehr-Lern-Format benutzen wir aus technischen Gründen zwei verschiedene mathematische Landkarten zur Geometrie. Eine Landkarte zeigt in drei Dimensionen die Zusammenhänge verschiedener Themen bzw. Sätze der Geometrie (Abb. 3) und die andere Landkarte zeigt in zwei Dimensionen die zeitliche Entwicklung verschiedener Themen der Geometrie (Abb. 4).



**Abb. 4:** Zeitliche Entwicklung

## **Lehr-Lern-Format**

Unser defragmentierendes Lehr-Lern-Format mit dem Titel „Geometrie in Schule und Hochschule“ wurde im Wintersemester 17/18 erstmals durchgeführt und richtete sich an Studierende des Lehramts Gymnasium mit Fach Mathematik. Ziel des Seminars war es, die Zusammenhänge zwischen Schul- und Hochschulgeometrie aufzuzeigen. Dafür beschäftigten wir uns einerseits mit der geschichtlichen Entwicklung verschiedener Aspekte der Geometrie, z.B. der Geschichte der Axiomatisierung der Geometrie. Wir thematisierten Euklids Axiome der Geometrie, die Frage der Unabhängigkeit des Parallelenaxioms bis hin zu Lobatschewskis Entdeckung der hyperbolischen Geometrie und Hilberts endgültiger Axiomatisierung der Geometrie. Andererseits verglichen wir verschiedene Aspekte der Geometrie aus Sicht der Schule und aus Sicht der Hochschule. Dabei gingen wir auf Gemeinsamkeiten, Unterschiede und Gründe für diese Unterschiede ein. Wir benutzten dazu die mathematischen Landkarten, um thematische Zusammenhänge und die Entwicklung verschiedener Themen aufzuzeigen.

Um die defragmentierende Wirkung zu verbessern, setzten wir im Seminar auf ein blended-learning Konzept. Dazu erstellten wir auf der e-learning Plattform ILIAS zu jeder Seminarsitzung ein eigenes Lernmodul mit Informationen zum jeweiligen Thema. Die vielfältigen Einsatzmöglichkeiten dieser Lernmodule lassen sich anhand des Aufbaus der einzelnen Seminarsitzungen darstellen. Jede Sitzung beginnt mit einem Einstieg in das Thema, in dem beispielsweise der Bezug zum Lehrplan in der Schule oder der Zusammenhang zu späteren Definitionen oder Sätzen herausgestellt wird. Danach erfolgt ein theoretischer Input. Dabei werden beispielsweise Definitionen aus Schule oder Hochschule oder aus Schule und Hochschule präsentiert. Hierbei spielen die Lernmodule eine große Rolle, da sie eine übersichtliche Zusammenstellung der nötigen Definitionen ermöglichen. Nach dem Input folgt eine Aufgabenstellung, die die Studierenden in Partner oder Gruppenarbeit lösen. Ein Beispiel hierfür wäre der Vergleich einer Definition aus dem Schulbuch mit der entsprechenden Definition aus der Hochschullehre oder der Beweis eines Satzes. Hier haben sich die Lernmodule als sehr hilfreich erwiesen, denn sie erlauben eine kleinschrittige Hilfestellung beim Beweisen, beispielsweise durch das Einbinden von Geogebra-Applets. Unterstützt werden die Studierenden während der Arbeitsphase einerseits durch den Dozenten und andererseits durch das entsprechende Lernmodul, in dem sie die nötigen Definitionen und Sätze nachlesen können. Nach der Arbeitsphase folgt noch die Präsentation und Diskussion der Ergebnisse. Hier wird geklärt, in wie weit die gestellten Aufgaben gelöst wurden, wo es Schwierigkeiten gab und ob sich Methoden, die bei-

spielsweise für einen Beweis aus der Schule verwendet wurden, auch für den Beweis des entsprechenden Satzes aus der Hochschule verwenden lassen. Für weitere Informationen zum ILIAS-Kurs siehe Datzmann (2017).

### **Beispiel: Herleitung des Umfangs einer Ellipse**

Eine komplette Sitzung im Seminar war dem Thema Ellipse gewidmet. Die Motivation, dieses Thema zu behandeln, lag darin, dass Ellipsen in der Schule kaum behandelt werden, obwohl Kreise in der Schulgeometrie eine große Rolle spielen. Die Landkarten zur Geometrie zeigten den Studierenden hier beispielsweise Zusammenhänge zwischen Ellipsen und anderen Themen der Geometrie und die Entwicklung des Wissens über Ellipsen. Der theoretische Input bestand in der Vorstellung der allgemeinen Ellipsengleichung und einiger Begrifflichkeiten, beispielsweise des Brennpunktes oder der numerischen und der linearen Exzentrizität einer Ellipse. Eine größere Aufgabenstellung in dieser Sitzung war die Herleitung eines Ausdrucks zur Berechnung des Umfangs einer Ellipse. Diese bearbeiteten die Studierenden in Gruppen und mit kleinschrittiger Hilfestellung. Sie stellten fest, dass sie die Ellipse parametrisieren müssen und anschließend die Bogenlänge dieser Kurve berechnen können. Bei dieser Herleitung erkannten sie beispielsweise die Relevanz der Methoden der Hochschule, denn sie benötigten dazu sowohl Methoden zur Berechnung der Bogenlänge als auch Methoden zur Berechnung bzw. Vereinfachung von Integralen, hier Integration durch Substitution. Und mit der gleichen Methode lässt sich natürlich auch der Umfang eines Kreises berechnen – auch wenn diese Beweisidee wohl nicht ganz für die Schule geeignet ist.

### **Literatur**

- Acevedo, C. (2014). OpenMathMap: Interaction. URL: <http://ceur-ws.org/Vol-1186/paper-01.pdf> [15.03.2018].
- Brandl, M. (2008). The vibrating string – an initial problem for modern mathematics; historical and didactical aspects. In I. Witzke (Ed.), 18th Novembertagung on the History, Philosophy & Didactics of Mathematics (S. 95–114). Berlin: Logos.
- Datzmann, A. (2017). Geometrie in Schule und Hochschule – Ein Blended Learning Format zur Vernetzung von Fachwissenschaft und Fachdidaktik. In Tettenhammer, Müller (Ed.), Digital Learning Media Pro – Einsatz digitaler Medien an der Hochschule, 3. URL: <https://ojs.uni-passau.de/index.php/dlmp/article/view/94/77> [15.03.2018]
- Kreidl, C. (2011). Akzeptanz und Nutzung von E-Learning-Elementen an Hochschule: Gründe für die Einführung und Kriterien der Anwendung von E-Learning. Münster, New York, München, Berlin: Waxmann.
- Tall, D. (2008). The Transition to Formal Thinking in Mathematics. *Mathematics Education Research Journal*, 20(2), S. 5–24.