

## Tätigkeitstheoretische Begriffsbildung – ACAT-basierte Entwicklung von Material am Beispiel des Winkelfeldes

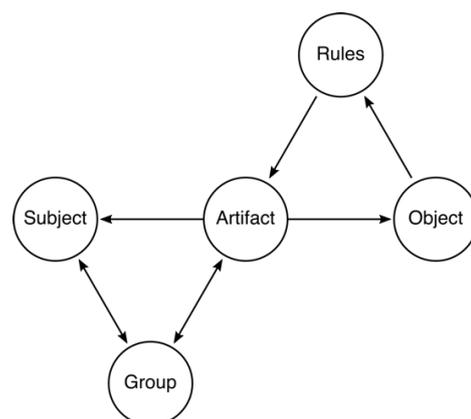
### Motivation: Winkelvielfalt

Untersuchungen zum Winkelbegriffsverständnis zeigen, dass Schülerinnen und Schüler Schwierigkeiten haben, verschiedene Aspekte des Begriffs in ein ganzheitliches und aus mathematischer Sicht „passendes“ Konzeptverständnis einzuordnen (Dohrmann & Kuzle 2015; Krainer 1989; Mitchelmore & White 2000). So manifestieren sich vielfältige „Fehlvorstellungen“, die Ihre Ursache auch in der Struktur und Komplexität des mathematischen Inhalts haben können: Der Winkelbegriff umfasst ein multidimensionales Begriffsfeld. Aus unterschiedlichen fachmathematischen Sichtweisen gewachsene Definitionsansätze führen schließlich zu vier Winkel-Aspekten, die für den schulischen Lehrgang relevant sind: (1) Winkel als *Knick*, (2) Winkel als *Drehung*, (3) Winkel als *Feld* und (4) Winkel als *Umdrehung* (angelehnt an Krainer 1989, S. 387). Oftmals kommt es jedoch zu einer Vermischung der einzelnen Aspekte – auch Schulbücher zeigen dies (vgl. EdM 2012, S. 161 und S. 164, Vermischung von Feld und Knick). Daher ist es insbesondere beim Winkel wichtig, die einzelnen Aspekte explizit herauszuarbeiten, ohne den ganzheitlichen Blick zu verlieren.

Die folgenden Überlegungen werden exemplarisch am Aspekt des Winkelfeldes fortgeführt. Wie kann nun der Aneignungsprozess über Vorstellungen zu diesem Begriffsaspekt gestaltet werden?

### ACAT als tätigkeitstheoretisches Modell

Das ACAT-Modell („Artifact Centric Activity Theory“) ist ein aus der Tätigkeitstheorie entwickeltes Modell und beschreibt das Beziehungsgefüge zwischen Lernenden, dem zu vermittelnden Inhalt, dem vermittelnden Artefakt sowie den Regeln zur Gestaltung des Artefakts und der gesamten Lernsituation im Unterricht (Ladel & Kortenkamp 2014). Hervorzuheben ist das Zentrum des Modells: das *Artefakt*. Für die



Interaktion eines Subjekts mit einem Objekt (z. B. beim Lösen eines mathematischen Problems) über ein Artefakt sind zwei Richtungen möglich. *Externalisierung*: Das Subjekt verwendet sein mathematisches Wissen (ausge-

prägt in *inneren Handlungen*) und nutzt das Artefakt entsprechend angemessen und zielgerichtet als *Werkzeug* (durch *äußere Handlungen*). *Internalisierung*: Durch die Nutzung des Artefakts, bspw. bei der Analyse von dessen Möglichkeiten und Grenzen (siehe van Randenborgh 2015, S. 159), wird das mathematische Objekt auf neue oder tiefere Weise im Subjekt verankert und das Artefakt dient in dem Sinne als Werkzeug zur Aneignung (vgl. auch *instrumentelle Genese*, z. B. van Randenborgh 2015, S. 53 ff.). Neben dieser Betrachtung der „Hauptachse“ hilft das Modell auch, die Entwicklung eines Artefakts zu steuern (oberes rechtes Dreieck, vgl. Ladel & Kortenkamp 2014, S. 243), bereits vorhandene Artefakte zu analysieren oder auch Unterrichtssituationen für den konkreten Einsatz eines Artefakts zu gestalten (linkes unteres Dreieck).

Für die Analyse von Begriffsbildungsprozessen am Thema Winkelfelder müssen nun die Interaktionsmöglichkeiten, die das Artefakt bietet bzw. bieten soll, präzise untersucht werden – im Folgenden dargestellt bei der Analyse von Winkelmesswerkzeugen sowie bei der Entwicklung eines Artefakts, das den Aufbau von Grundvorstellungen zum Winkelfeldaspekt unterstützt.

### **ACAT als Modell zur Analyse: Geodreieck als Messinstrument**

Der fachmathematische Ansatz, Winkelfelder als Punktmenge bzw. Teil der Ebene mit unendlicher Ausdehnung zu betrachten, ist für Messüberlegungen im schulischen Kontext nicht ohne weiteres hilfreich: Wird die unendliche Feld-Ausdehnung akzeptiert, so ist die Mächtigkeit der von den Schenkeln begrenzten Punktmenge nicht finit bestimmt (und damit auch nicht bestimm- bzw. messbar). Die konkrete Winkelmessung verlangt eben nicht die Messung der Mächtigkeit der Punktmenge – in dem Sinne wären alle Winkelfelder gleichmächtig (Moroff 1890, S. 5) – sondern die Bestimmung der Spannweite durch die es begrenzenden Schenkel. Daher bedient man sich eines quantifizierbaren Repräsentanten für das Winkelfeld, der „V-Figur“, bestehend aus Scheitelpunkt und Schenkeln.

Bei der Handlung „Winkelmessung“ müssen vor dem Anlegen des Geodreiecks zunächst der Scheitelpunkt und der ausgewiesene Erstschenkel der V-Figur identifiziert werden. Für den Messprozess gibt es zwei Methoden (Anlegen-Ablesen-Methode und Anlegen-Drehen-Ablesen-Methode, siehe Dohrmann & Kuzle 2015). Hinzu kommen zwei gegenläufige Winkel-Skalen, so dass eine bewusste Entscheidung über den Erstschenkel getroffen werden muss. Auch besitzt das Werkzeug weitere Markierungen, die nichts mit der Winkelmessung zu tun haben.

Gleichzeitig ist es mit dem Geodreieck auch möglich, Längen von Strecken zu bestimmen. Aufgrund analoger Teilhandlungen (Nullpunkt anlegen,

Grenzen identifizieren, an Skala ablesen) und optischer Ähnlichkeiten (Abstand zweier benachbarter  $^{\circ}$ -Abschnitte entspricht in etwa Abstand zweier benachbarter mm-Abschnitte) können Schülerinnen und Schüler eine ungewollte Analogie zwischen Winkel- und Längenmessung aufbauen und damit beides nicht mehr klar voneinander trennen. Weitere Untersuchungen (Dohrmann & Kuzle 2015) legen die Vermutung nahe, dass die Nutzung des Geodreiecks an der Ausbildung der Fehlvorstellung „ $1^{\circ}$  ist so etwas wie 1 mm“ beteiligt ist.

Der Umgang mit dem Geodreieck ist offensichtlich nicht hilfreich, um Handlungen aufzubauen, die für das Messverständnis von Winkelfeldern nützlich sind. Dabei ist das Geodreieck an sich kein schlechtes Werkzeug – vielmehr hat es im tätigkeitstheoretischen Sinne ein anderes Objekt im Hintergrund und ist damit für das Messen von Winkelfeldern, mit Fokus auf der Vermittlung des Feld-Aspektes, ungeeignet.

### **ACAT als Modell zur Entwicklung: Lernumgebung zum Aufbau von Grundvorstellungen**

Vom mathematischen Objekt ausgehend werden nun Regeln erstellt, die sich in der Gestaltung des zu entwickelnden Artefakts widerspiegeln. Das Artefakt muss einerseits die Regeln in der Repräsentation des Objekts widerspiegeln, andererseits muss es ermöglichen, dass das Subjekt durch seine Lernhandlung mit dem Artefakt die Regeln bzw. Eigenschaften des Objekts internalisiert. Daher fällt die Entscheidung auf ein digitales Medium, da sich damit die sich aus den Regeln ergebenden Restriktionen präzise umsetzen lassen und ein „operatives Handeln“ im Sinne der Grundvorstellungsidee (vom Hofe 1995, S. 98) ermöglicht wird. Für das Winkelfeld gelten beispielsweise:

**Regel:** besitzt Scheitelpunkt, der Lage des Winkels bestimmt; **Umsetzung/Repräsentation:** Verschiebung des Scheitelpunkts bewirkt, dass Schenkel mitbewegt werden (Translation des kompletten Winkelfeldes), Verschiebungsgeste innerhalb des Winkelfeldes hat keine Auswirkung; **Lernhandlung:** Verschieben des Winkels über Verschieben des Scheitelpunkts

**Regel:** wird begrenzt durch zwei Schenkel, deren Lage bestimmt Ausrichtung und Maß des Feldes; **Umsetzung/Repräsentation:** Zur Änderung des Maßes müssen Schenkel um den Scheitelpunkt gedreht werden, Drehpunkt ist fest, Schenkel können angefasst werden; **Lernhandlung:** Änderung der Ausrichtung der Schenkel, Änderung des Winkelmaßes

**Regel:** „Zwischenbereich“ ist Punktmenge unendlichen Ausmaßes; **Umsetzung:** Zwischenbereich wird flächig „ausgemalt“ und immer bis zum Rand

des Displays dargestellt; Verschieben und Skalieren macht deutlich, dass es „immer weiter geht“

## Zusammenfassung

Die oben dargestellten Überlegungen haben erste Ansätze gezeigt, wie mithilfe des ACAT-Modells der Feld-Aspekt des Winkelbegriffs hinsichtlich der Messung und hinsichtlich des Aufbaus von Grundvorstellungen analysiert werden kann. Für ein vollständiges Winkelverständnis müssten ebensolche Überlegungen nun auch noch auf die anderen Winkelaspekte übertragen werden. Doch auch nach deren Aufbau ist es notwendig, einen weiteren Abstraktionsschritt zu gehen, um das „gemeinsame Wesen“ der Winkelaspekte herauszuarbeiten (Mitchelmore & White 2000, S. 196) – der Messprozess kann hierbei hilfreich sein. Das ACAT-Modell bildet hier einen Rahmen, der die Analyse vorhandener und die Entwicklung neuer Materialien strukturiert und so eine stoffdidaktisch orientierte Beforschung von Begriffsbildungsprozessen ermöglicht.

## Literatur

- Dohrmann, C. & Kuzle, A. (2015). Winkel in der Sekundarstufe I – Schülervorstellungen erforschen. In M. Ludwig, A. Filler, & A. Lambert (Hrsg.), *Geometrie zwischen Grundbegriffen und Grundvorstellungen. Jubiläumsband des Arbeitskreises Geometrie in der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik* (S. 62–76). Wiesbaden: Springer Verlag.
- Elemente der Mathematik [zitiert als EdM] (2012). Sachsen, 5. Schuljahr. Schroedel.
- Krainer, Konrad (1989). *Lebendige Geometrie. Überlegungen zu einem integrativen Verständnis von Geometrieunterricht anhand des Winkelbegriffs*. Alpen-Adria-Universität Klagenfurt.
- Ladel, S. & Kortenkamp, U. (2014). Number Concepts – Processes of Internalization and Externalization by the Use of Multi-Touch Technology. In: U. Kortenkamp, B. Brandt, C. Benz, G. Krummheuer, S. Ladel & R. Vogel, R. (Hrsg.), *Early Mathematics Learning. Selected Papers of the POEM 2012 Conference*. New York: Springer. 237–253.
- Mitchelmore, M. & White, P. (2000). Development of Angle Concepts by Progressive Abstraction and Generalisation. *Educational Studies in Mathematics*, 41, 209–238.
- Moroff, A. (1890). Das Winkelfeld und die anderen ebenen Felder. *Programm der Königlichen Studienanstalt Hof*. Princeton University.
- van Randenborgh C. (2015). *Instrumente der Wissensvermittlung im Mathematikunterricht*. Wiesbaden: Springer Spektrum.
- Vom Hofe, R. (1995). *Grundvorstellungen mathematischer Inhalte*. Heidelberg, Berlin: Spektrum Akademischer Verlag.