Andreas EBERL, Regensburg

„Wozu brauche ich das überhaupt? Ich will doch nur Lehrer werden!“ – Mathematische Grundbegriffe zwischen Schule und Hochschule

Ausgangslage

Realistisch betrachtet ist die über 100 Jahre alte „Doppelte Diskontinuität“ (Felix Klein) nirgendwo „aus der Welt“. Die erste Diskontinuität erschwert dabei den Aufbau tragfähiger Grundvorstellungen, was zu frühen Misserfolgen im Studium führen kann. Im Sinne der zweiten Diskontinuität fragen sich nicht wenige Lehramtsstudierende, wozu sie die fachmathematischen Inhalte überhaupt brauchen – wollen sie doch später „nur“ Lehrer werden. Gerade in den grundlegenden Vorlesungen zur Linearen Algebra und Analysis ließen sich aber viele Gründe finden, weshalb diese integraler Bestandteil eines gymnasialen Lehramtsstudiums sein müssen. Die offenbar fehlende Sinnstiftung für die Inhalte ihrer fachlichen Ausbildung führt – gepaart mit möglichen Misserfolgen – bei vielen Lehramtsstudierenden schnell zu einem Motivationsverlust mit weitergehenden negativen Auswirkungen wie einem Wechsel oder Abbruch des Studiums.

Um der ersten Diskontinuität entgegen zu wirken, bieten wir an der Universität Regensburg allen Studienanfängern in Mathematik- und Physik-Studiengängen seit mehr 10 Jahren einen Brückenkurs vor Studienbeginn an. In dieser zweiwöchigen Veranstaltung wird das übergeordnete Ziel verfolgt, den Teilnehmern den Übergang und Einstieg in das Studium zu erleichtern. Die Teilnehmer erleben in der Studieneingangsphase so weniger „Schockerlebnisse“, sind mit der formalen und deduktiven Arbeitsweise bereits in Ansätzen vertraut und besitzen erste Erfahrungen mit wichtigen Begriffen und Konzepten. Dennoch erfasst der Brückenkurs nur einen Teil der durch die erste Diskontinuität verursachten Probleme. In diese Lücke stößt nun eine Schnittstellen-Veranstaltung mit dem Titel „Hochschulmathematik für die Schule“, die sich außerdem auch der zweiten Diskontinuität annimmt. In dem Artikel werden das Konzept und die Umsetzung der Veranstaltung am Beispiel von Grundbegriffen erläutert.

Hochschulmathematik für die Schule

Generelles Ziel der Veranstaltung ist es, Bezüge zwischen universitärer und schulischer Mathematik sichtbar zu machen. Dabei zeigen wir auch, wie man fachmathematische Kenntnisse für die Unterrichtspraxis konkret nutzen kann. So versuchen wir einen kleinen Teil dazu beizutragen, die „doppelte Diskontinuität … endlich aus der Welt zu schaffen“ (Klein).

In Fachgruppe Didaktik der Mathematik der Universität Paderborn (Hrsg.) Beiträge zum Mathematikunterricht 2018. Münster: WTM-Verlag

Die Schnittstellenveranstaltung besteht aus einem Vorlesungs- und einem Präsenzübungsteil. Im Vorlesungsteil wird an die Inhalte aus den Fachvorlesungen angeknüpft, bevor die Bezüge zur Schulmathematik konkret dargestellt werden. Als besonders geeignet erweisen sich tabellarische Übersichten zum Vergleich der verwendeten Konzepte. Im Präsenzübungsteil bieten wir den Teilnehmern ein vielfältiges Material an Schnittstellenaufgaben. Darunter befinden sich sowohl rein fachliche Aufgaben zur Reflexion und Vertiefung der Fachinhalte in einem schulmathematischen Kontext, als auch Fragestellungen aus Schulbüchern, an denen zum Beispiel alternative Lösungsstrategien oder Zusammenhänge zu universitären Inhalten diskutiert werden. In didaktisch ausgerichteten Aufgaben erläutern wir unterrichtliche Vorgehensweisen, analysieren Darstellungsmöglichkeiten zu abstrakten Begriffen – auch unter Nutzung von DGS und CAS – und beschäftigen uns mit Schülerschwierigkeiten. Besitzen universitäre Theorien interessante Anwendungen, so machen wir die Modellierung realer Fragestellungen durch abstrakte, fachliche Konzepte sichtbar.

Inhaltlich gliedert sich die Veranstaltung in Grundlagen (Beweise an der Uni und Beweise in der Schule, Mengen und Zahlen, Abbildungen sowie Algebraische Strukturen), Abschnitte zur Linearen Algebra (Vektorräume, Lineare Abbildungen, Matrizen, Determinanten sowie Eigenwerte) und Kapitel zur Analysis (Grenzwerte, Stetigkeit, Differenzierbarkeit, Integralrechnung, mehrstelligen Funktionen sowie Taylor- und Potenzreihen).

Im Folgenden soll an konkreten Inhalten die Thematisierung mathematischer Grundbegriffe in der Veranstaltung erläutert werden.

1. Abbildung / Funktion

Beschreiben die Begriffe „Abbildung“ und „Funktion“ das gleiche Konzept? An der Hochschule wird „Abbildung“ als universeller Grundbegriff abstrakt definiert, strukturiert untersucht und vielseitig verwendet. Aus der Schule kennt man Abbildungen in der Geometrie (z.B. Kongruenzabbildungen) und Funktionen in der Algebra/Analysis. Das gemeinsame Konzept ist für Schüler und Studierende kaum erkennbar. Schulisch liegt der Schwerpunkt auf der Abbildungsvorschrift und weniger auf den betroffenen Mengen. Visualisierungen sind von herausragender Bedeutung, sowohl für die Definition der Begriffe als auch für die Analyse von Eigenschaften. Im Bereich der Funktionen stellen Darstellungswechsel und der Einfluss von Parametern zentrale Unterrichtselemente dar. Eine mögliche Analyse von Gemeinsamkeiten und Unterschieden in einer tabellarischen Übersicht kann zum Beispiel (auszugsweise) folgende Elemente enthalten:

ABBILDUNG/ FUNKTION	Hochschule	Schule
Definitionen	„Seien X und Y Mengen. $f \subset X \times Y$ heißt Abbildungsrelation, wenn für jedes $x \in X$ genau ein $y \in Y$ mit $(x, y) \in f$ existiert."	„Eine Zuordnung $x \mapsto y$, die jedem Wert für x nur einen einzigen Wert für y zuordnet, heißt Funktion."
Abgrenzung zur Relation	Wohldefiniertheit	Ein Graph ist Funktionsgraph, wenn jede Parallele zur y-Achse den Graph höchstens einmal schneidet.
Typische Darstellungen	- Abbildungsvorschrift $x \mapsto f(x)$. - $f(x)$ nicht immer aus x „berechenbar" - Pfeilbilder: kommutative Diagramme - Bei linearen Abbildungen: Matrizen	Hauptsächlich: - Funktionsgleichung oder -term - Funktionsgraph - Wertetabelle
Surjektiv	$\forall y \in Y \; \exists x \in X : f(x) = y$	Wertemenge ganz $\mathbb{Q}$ bzw. $\mathbb{R}$. Jede Parallele zur x-Achse schneidet den Graphen mind. einmal.
Injektiv	$\forall x_1, x_2 \in X \; (f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2)$	Jede Parallele zur x-Achse schneidet den Graphen höchstens einmal. Kriterium für Umkehrbarkeit
Umkehrung	Inverse Abbildung $f^{-1}: \; Y \to X$ Definition: $f \circ f^{-1} = id_Y, f^{-1} \circ f = id_X$ Satz: „Eine Abbildung ist umkehrbar genau dann, wenn sie bijektiv ist!"	Umkehrfunktion f^{-1}, Strategien zur Ermittlung: graphisch: Spiegelung an der Winkelhalbierenden $y = x$. algebraisch: Auflösen der Funktionsgleichung nach x, Vertauschung von Definitions- und Wertemenge.

Abb. 1: Vergleich des Abbildungs- und Funktionsbegriffs in Hochschule und Schule

Hier gibt es eine Vielzahl geeigneter Schnittstellenaufgaben. Exemplarisch genannt sei hier die Suche nach schulisch relevanten Funktionen bei (nicht) vorgegebener Injektivität oder Surjektivität, oder die Frage, wie man algebraische Manipulationen an Funktionstermen durch geometrische Abbildungen der Graphen visualisieren kann.

2. Mengen und Zahlen

Mengen als fundamentale Objekte der Hochschulmathematik besitzen viele Bezüge zu schulmathematischen Themen (Zahlbereiche, Definitions-, Lösungs- und Wertemenge, …). Zur Analyse der Zusammenhänge eignen sich beispielsweise konkrete Mengenbeschreibungen (formal vs. sprachlich, algebraisch vs. geometrisch). Zahlbereichserweiterungen werden an der Hochschule häufig über Axiome oder Äquivalenzrelationen realisiert, während an der Schule Anwendungen und Visualisierungen als Motivationsgrundlage dienen. In den Aufgaben können zum Beispiel alternative Ansätze zur Approximation reeller Zahlen erläutert oder figurierte Zahlen im Pascal'schen Dreieck untersucht werden.

3. Algebraische Strukturen

Gruppen, Ringe und Körper haben als wiederkehrende Muster an der Hochschule ihren festen Platz. Sie erscheinen als Mengen von Objekten mit Verknüpfungen, bei denen bestimmte Axiome Gültigkeit besitzen. Bezüge zur Schule finden sich zum Beispiel bei Rechengesetzen. Dabei lassen sich didaktisch reduzierte Beweisideen aus der Hochschule auch zur Begründung schulischer Regeln heranziehen, z.B. beim Rechnen in den ganzen Zahlen. Auch bei Verknüpfungen von Funktionen oder bei Symmetrie, Kongruenz und Ähnlichkeit in der Geometrie gibt es Verbindungen zu algebraischen Strukturen.

4. Vektoren und Vektorraum

Der allgemein gefasste Vektorbegriff an der Hochschule ist nicht geeignet, die in der Schule häufig beobachteten, durch einen Begriffswirrwarr verstärkten Verständnisschwierigkeiten aufzulösen. Eine Kategorisierung von (affinen) Unterräumen in niedrigen Dimensionen und eine Betrachtung von Funktionsklassen, die eine Vektorraumstruktur tragen, können zu einem Erkenntnisgewinn beitragen. Hier gibt es auch motivierende Realkontexte, in denen Vektorräume als Modelle zur Lösung genutzt werden können.

5. Lineare Abbildungen und lineare Funktionen

Beim Vergleich linearer Abbildungen von Vektorräumen mit linearen Funktionen aus der Schule stellt man fest, dass die Konzepte zwar verwandt, aber nicht äquivalent sind. So lassen sich unter den linearen Funktionen nur die direkt proportionalen Zuordnungen als reell-lineare Abbildungen des Vektorraums der reellen Zahlen identifizieren. Fragestellungen zu linearen Funktionen und zu geometrischen Abbildungen (Drehung, Spiegelung, …) im Kontext linearer Abbildungen fördern das Verständnis enorm. Auch lineare Gleichungssysteme bieten ein reichhaltiges Betätigungsfeld.

Fazit

Das Herstellen von Bezügen zwischen Schul- und Hochschulmathematik ist aus vielen Gründen lohnenswert. Geeignete Schnittstellenaufgaben sind in einem breiten Literaturangebot veröffentlicht, aus dem an dieser Stelle eine kleine Auswahl angegeben ist:

Literatur

Ableitinger, C. & Herrmann, A. (2013). *Lernen aus Musterlösungen zur Analysis und Linearen Algebra*. Wiesbaden: Springer.

Arens, T. et al. (2015). *Mathematik*. Berlin; Heidelberg: Springer Spektrum.

Bauer, T. (2013). *Analysis – Arbeitsbuch*. Wiesbaden: Springer.

Beutelspacher, A. (2016). *Mathe-Basics zum Studienbeginn*. Wiesbaden: Springer.

Beutelspacher, A. et al. (2012). *Mathematik neu denken*. Wiesbaden: Vieweg+Teubner.

Fischer, G. (2017). *Lernbuch Lineare Algebra und Analytische Geometrie*. Wiesbaden: Springer.

Karpfinger, C. (2017). *Arbeitsbuch Höhere Mathematik in Rezepten*. Berlin; Heidelberg: Springer Spektrum.