

Fehlkonzepte beim Lösen prozeduraler Analysisaufgaben

Obwohl es Arbeiten gibt, die Vorstellungen von Lernenden zu Konzepten der Analysis in einem “algebraischen Modus” wie auch einem “geometrischen Modus” (Artigue, 1991) aufnehmen (z.B. Siyepu, 2013; Orhun, 2012), werden Schwierigkeiten von Lernenden zu Konzepten der Analysis in der mathematikdidaktischen Forschung relativ selten betrachtet. Das betrifft insbesondere elementare Grundkonzepte wie etwa den Ableitungsbegriff, während weitergehende Konzepte wie der Grenzwertbegriff (Hähkiöniemi, 2005) oder auch der Ableitungsbegriff Funktionen in mehreren Dimensionen (Gaisman et al., 2018) international häufiger untersucht worden sind. Insgesamt spiegelt so die bisherige Forschung nur zum Teil die Bedeutung der Analysis für den Mathematikunterricht der Oberstufe oder für den Studieneingang in allen MINT-Fächern wider. Daher ist das wesentliche Ziel des Forschungsprojekts „Konzepte von Lernenden zur Analysis“ (KoLA), das bestehende Wissen zu Vorstellungen von Lernenden im Bereich der Analysis zu erweitern. In diesem Beitrag werden aus dem Projekt KoLA drei Aspekte berührt. Zunächst wird die Einteilung von Aufgaben in prozedurale und konzeptuelle diskutiert. Weiterhin gehen wir auf eine Kategorisierung von Fehlkonzepten von Lernenden bei Aufgaben in beiden genannten Modi (vgl. auch Eichler et al., 2017). Nach einer Skizzierung der Methode unserer Studie gehen wir schließlich exemplarisch auf Ergebnisse ein und hier speziell eine Fehlerkategorie.

Prozedurale und konzeptuelle Aufgaben zur Analysis

In der mathematikdidaktischen Forschung ist die Unterscheidung in prozedurales und konzeptuelles Wissen breit diskutiert worden. Nach Hiebert und Lefevre (1986) ist das prozedurale Wissen

“knowledge of rules, algorithms, or procedures used to solve mathematical tasks. A key feature of procedures is that they are executed in a predetermined linear sequence. It is the clearly sequential nature of procedures that probably sets them most apart from other forms of knowledge“

Im Gegensatz dazu ist konzeptuelles Wissen

“knowledge that is rich in relationships. It can be thought of as a connected web of knowledge, a network in which the linking relationships are as prominent as the discrete pieces of information.”

Betrachtet man allerdings beide Kategorien empirisch, so ergibt sich das Problem der Trennung der beiden Wissensfacetten (Schneider, 2006) sowie

das Problem der Zuordnung, ob ein Lernender in seiner Antwort auf eine Aufgabe prozedurales oder konzeptuelles Wissen aufgerufen hat, was nicht zuletzt auch von der Tiefe des zuvor erworbenen Erfahrungen abhängig ist. Aus diesem Grund unterscheiden wir in KoLA ausschließlich die Zielrichtung von Aufgaben. Hierbei sind prozedurale Aufgaben solche,

die (überwiegend) das lineare Abarbeiten (Hiebert & Lefevre, 1986) von Prozeduren, Algorithmen oder Schemata, die potentiell bekannt sind (Rittle-Johnson & Schneider, 2014), für eine (überwiegend) eindeutige Lösung erfordern.

In Abgrenzung dazu verstehen wir konzeptuelle Aufgaben als solche, die

das Beschreiben von Begriffssystemen, die bekannt sein können, für deren Ausführung aber (i.d.R.) kein Algorithmus vorhanden ist, erfordern (vgl. Schneider, 2006).

Ein Beispiel für eine prozedurale Aufgabe in einem algebraischen Modus besteht beispielsweise in der Aufforderung, die Ableitung einer Funktion, etwa mit der Gleichung $f(x) = (2x + 4)^7$, zu bestimmen. Diese Aufgabe ist insbesondere dann prozedural, wenn das Verfahren zur Ableitung ganzzahliger Funktionen prinzipiell bereits erlernt wurde.

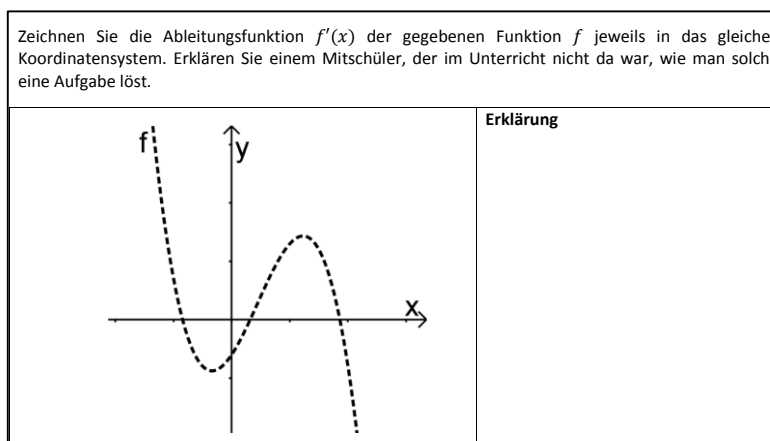


Abb. 1: Prozedurale Aufgabe im geometrischen Modus.

Auch eine Aufgabe im geometrischen Modus kann als prozedural bezeichnet werden, wenn es eine Aufgabe zu einer bekannten Aufgabenklasse mit einer linear abzuarbeitenden, zumindest überwiegend eindeutigen Lösung gibt. Das ist bei der Aufgabe in Abb. 1 der Fall, da hier regelgeleitet besondere Stellen als Nullstellen der Ableitungsfunktion und ebenso die Steigung in den drei durch die beiden Nullstellen entstehenden Intervallen bestimmt werden können. Ob zur Lösung einer prozeduralen Aufgabe individuell Elemente des prozeduralen oder konzeptuellen Wissens aktiviert werden, ist bei der Unterscheidung von Aufgabentypen unerheblich. Abgrenzend zu prozeduralen Aufgaben sind konzeptuelle Aufgabe beispielsweise solche, die das Beschreiben von Begriffssystemen umfassen, für deren Ausführung (i.d.R.) kein Algorithmus vorhanden ist. Etwa wäre die Aufgabe, den Be-

griff Extrempunkt zu beschreiben eine konzeptuelle Aufgabe. In diesem Beitrag beziehen wir uns exemplarisch auf prozedurale Aufgaben.

Kategorien von Fehlkonzerten von Lernenden zur Analysis

Für Lösungen prozeduraler Aufgaben im algebraischen Modus gibt es Kategorisierungen (z.B. Siyepu, 2013), von denen wir insbesondere solche beachten, die der Analysis zuzuordnende Fehlkonzerte beschreiben. Im Gegensatz dazu sind Lösungen zu Aufgaben in einem geometrischen Modus bisher nicht kategorisiert worden, sondern mit Bezug zu bestehenden theoretischen Modellen individuell beschrieben worden (z.B. Asiala et al., 1997). Als Synthese bestehender Vorarbeiten haben wir ein System von Kategorien entwickelt (Eichler et al., 2017), das für die Analyse von Aufgabenlösungen von Lernenden zu prozeduralen Aufgaben im algebraischen und im geometrischen Modus tragfähig sein soll. Dieses System umfasst 1) *Globale Regelmässigung*, bei der zu einer Aufgabeklasse ein falsches, häufig unvollständiges Lösungsschema aufgerufen wird. Als 2) *Lokale Regelmässigung* bezeichnen wir die Verwendung falscher Schemata bei einer spezifischen Untermenge einer Aufgabeklasse, während bei anderen Repräsentanten der Aufgabeklasse das korrekte Schema angewendet wird. Schließlich fassen wir *Übergeneralisierungen* in eine Kategorie, bei denen Schemata, die für eine Aufgabeklasse korrekt sind auf eine Aufgabeklasse angewendet werden, die ein anderes Schema erfordern.

Methode

Die aktuelle Stichprobe im Projekt KoLA umfasst rund 550 Schülerinnen und Schüler eines deutschen Bundeslandes. In dieser Stichprobe wurden verschiedene Aufgabensets randomisiert so eingesetzt, dass insgesamt mindestens 100 Lernende eine der prozeduralen (algebraischen oder geometrischen) Aufgaben bearbeitet haben. Die Bearbeitung (30 Minuten) fand ohne inhaltliche Intervention statt. Alle Aufgaben wurden anhand eines Manuals mindestens zur Hälfte doppelt kodiert, wobei nur die Codes beachtet wurden, die eine Reliabilität über 0,75 (Cohens Kappa) aufwiesen. Als systematische Fehler wurden schließlich solche behandelt, die eine Häufigkeit von mehr als 5% in zumindest einer Teilaufgabe aufwiesen.

Exemplarisches Ergebnis

Ein Ergebnis bezieht sich auf globale Regelmässigungen, die zu Aufgaben im algebraischen wie im geometrischen Modus auftreten. Etwa ist eine globale Regelmässigung bei der Anwendung der Kettenregel die Vernachlässigung der inneren Ableitung (Abb. 2), die wir bei etwa 10% der Lösungen gefunden haben (bzw. bei rund 15% der fehlerhaften Lösungen).

Bei Aufgaben im grafischen Modus gehört etwa die Verwendung der korrekten Form (hier Parabelform; in 8% der Lösungen bzw. in 15% der fehlerhaften Lösungen) ohne Berücksichtigung von Ankerstellen oder der Steigung in bestimmten Intervallen zu den globalen Regelmisssachtungen, da hier das auszuführende Schema zur Aufgabenlösung unvollständig ist.

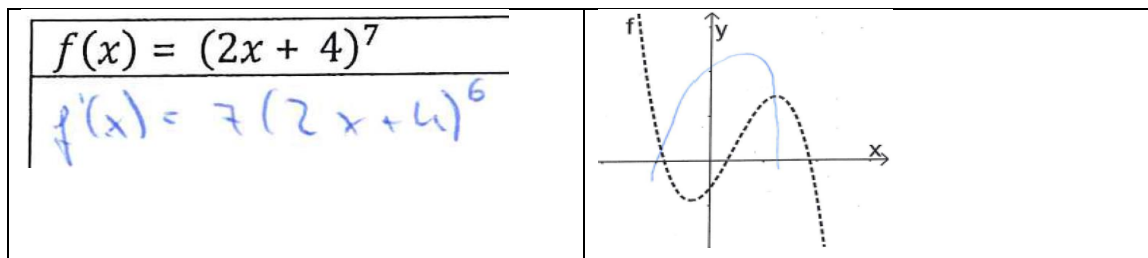


Abb. 2: Globale Regelmisssachtungen bei Aufgaben im algebraischen und geometrischen Modus.

Die Analyse aller Lösungen soll hier ein möglichst vollständiges Bild von Fehlvorstellungen von Schülerinnen und Schüler zu Grundkonzepten der Differentialrechnung ergeben.

Literatur

- Artigue, M. (1991). Analysis. In D. Tall (Ed.), *Advanced Mathematical Thinking* (pp. 167–198). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.
- Asiala, M., Cottrill, J., Dubinsky, E., & Schwingendorf, K. E. (1997). The development of students' graphical understanding of the derivative. *The Journal of Mathematical Behavior*, 16(4), 399–431.
- Eichler, A., Hahn, T., Isaev, V. & Gradwohl, J. (2017). Konzepte von Lernenden zu Grundbegriffen der Analysis. Beiträge zum Mathematikunterricht.
- Gaisman, M. T., Martínez-Planell, R. & McGee, D. (2018). Student understanding of the relation between tangent plane and the total differential of two-variable functions. *International Journal of Research in Undergraduate Mathematics Education*, 4(1), S. 181–197.
- Hähkiöniemi, M. (2005). Is there a limit in the derivative? – exploring students' understanding of the limit of the difference quotient. In M. Bosch (Hrsg.), Proceedings of CERME4 (S. 1758-1767). Sant Feliu de Guíxols, Spanien: FUNDEMI IQS – Universität Ramon Llull and ERME
- Hiebert, J. & Lefevre, P. (1986). Conceptual and procedural knowledge in mathematics: An introductory analysis. In J. Hiebert (Hrsg.), *Conceptual and procedural knowledge: The case of mathematics* (S. 1–27). London: Lawrence Erlbaum.
- Orhun, N. (2012). Graphical Understanding in Mathematics Education: Derivative Functions and Students' Difficulties. *Procedia – Social and Behavioral Sciences*, 55, 679–684.
- Schneider, M. (2006). Konzeptuelles und prozedurales Wissen als latente Variablen: Ihre Interaktion beim Lernen mit Dezimalbrüchen: Dissertation. Berlin: TU Berlin.
- Siyepu, S. W. (2013). An exploration of students' errors in derivatives in a university of technology. *The Journal of Mathematical Behavior*, 32(3), 577–592.