Hans-Jürgen ELSCHENBROICH, Korschenbroich

Rettet die Anschauung!

Der Computer in seinen Varianten vom PC über Tablet bis Smartphone hat ein großes Potential zur dynamischen Visualisierung. Er ist jedoch nicht per se anschaulich, auch wenn ein Bildschirm das suggeriert, sondern kann auch hinderlich sein oder auf Abwege führen. Wohlverstanden kann er aber Anschauung schaffen und erweitern und Schüleraktivitäten fördern.

1. Rettet die Phänomene!

WAGENSCHEIN (1977) forderte „*in allen Schularten von Anfang an und immer wieder dem Grundsatz zu folgen: Zum Verstehen gehört: Stehen auf den Phänomenen*“. Ein Phänomen ist laut Wikipedia ein aus dem Altgriechischen übernommener Begriff, „*ein sich Zeigendes, ein Erscheinendes“, „eine mit den Sinnen wahrnehmbare Einheit des Erlebens*“. WAGENSCHEIN steht so in einer Reihe mit Philosophen, Pädagogen und Mathematikern.

KANT formulierte die berühmten Sätze: „*So fängt denn alle menschliche Erkenntnis mit Anschauungen an, geht von da zu Begriffen und endigt mit Ideen.*“ „*Gedanken ohne Inhalt sind leer. Anschauungen ohne Begriffe sind blind.*“ „*Der Verstand vermag nichts anzuschauen und die Sinne vermögen nichts zu denken. Nur daraus, daß sie sich vereinigen, kann Erkenntnis entspringen.“* (KANT, 1781)

PESTALOZZI forderte, „*die mechanische Form allen Unterrichts den ewigen Gesetzen zu unterwerfen, nach welchen der menschliche Geist sich von sinnlichen Anschauungen zu deutlichen Begriffen erhebt*“ und betonte „*daß jede Erkenntnis von der Anschauung ausgehen und auf sie müsse zurückgeführt werden können*“ (PESTALOZZI, 1801).

KLEIN charakterisierte: „*Die* Art des Unterrichtsbetriebes *[...] kann ich vielleicht am besten durch die Stichworte* anschaulich *und* genetisch *kennzeichnen, d. h. das ganze Lehrgebäude wird auf Grund bekannter anschaulicher Dinge ganz allmählich von unten an aufgebaut*“. (KLEIN, 1933)

2. Rettet die Ideen!

Ein Jahr nach WAGENSCHEIN folgte der Aufruf von VOLLRATH (1978). Der erste Satz lautete: „*Der Mathematikunterricht lässt sich durch Leitideen strukturieren*“ (wobei anzumerken ist, dass die von VOLLRATH aufgeführten Ideen nicht ganz dem Verständnis von Leitideen der Bildungsstandards entsprechen). VOLLRATH mahnte im Folgenden, sich nicht „*von der Macht des Kalküls berauschen zu lassen*“, und warnte vor „*einer völligen Vernebelung der Ideen durch eine pseudomathematische Terminologie*“. Er betonte, „*daß sich manche bedeutende Ideen mit geringem formalen Aufwand vermitteln lassen*“ und „*daß es jeweils so etwas wie eine genetisch fundamentale Idee gibt, die dem Begriffsbildungsprozeß zugrundeliegt*“.

3. Aspekte von Funktionen

Die Meraner Reform forderte schon vor einem Jahrhundert die „*Gewohnheit des funktionalen Denkens*“ und diese solle „*auch in der Geometrie durch fortwährende Betrachtung der Änderungen gepflegt werden, die die ganze Sachlage durch Größen- und Lagenänderung im einzelnen erleidet.*“ (GUTZMER, 1908), was ein sehr anschaulicher Ansatz war.

Das hat auch LIETZMANN stark beeinflusst. Er spricht bei Funktionen von der analytischen Form, von Tabelle und graphischer Darstellung (was wir heute neben Text die vier Gesichter einer Funktion nennen) und nennt zusätzlich noch die „*Abhängigkeit in geometrischem Gewande*“. Denn: „*Jeder geometrische Ort ist die Festlegung einer funktionalen Abhängigkeit.*“ (LIETZMANN, 1916)

Wir finden hier ein modern anmutendes Verständnis von Funktionen. Der fast in Vergessenheit geratene Aspekt der „*Funktion in geometrischem Gewande*“ kann heutzutage mit dynamischer Software problemlos als Ortslinie zum Tragen kommen (Graphenplotter).

4. Facetten der Anschauung

Im Folgenden sollen einige Beispiele zu Facetten der Anschauung vorgestellt werden. Die Textform kann natürlich nicht die Dynamik vermitteln, die Beispiele können aber im Internet heruntergeladen und dynamisch betrachtet werden (www.geogebra.org/m/MZDvBxVm).

Von Phänomenen ausgehen

3x3 LGS werden in der Sek I (wenn überhaupt noch) nur algorithmisch gelöst, eine graphische Lösung ist nur bei 2x2 LGS üblich. Und bloßes Benutzen des Solve-Befehls im CAS-Modus bringt zwar ein Ergebnis, aber kein Verständnis. In GeoGebra können wir einfach die Gleichungen in die Eingabezeile schreiben und erhalten unmittelbar (d. h. ohne Thematisierung der Normalform einer Ebenengleichung) eine Darstellung der zugehörigen Ebene im 3D-Fenster (das müssen wir als Phänomen akzeptieren). Die Ebenenschnitte können wir dann mit entsprechenden Befehlen bestimmen und kommen damit graphisch zur Lösung.

Virtuelle Phänomene wahrnehmen

Mit einer geeigneten Lernumgebung können wir virtuell an einem Oktaeder gleichzeitig an allen Ecken gleichgroße Pyramiden abschneiden, deren Größe mit einem Schiebereger steuern und den dynamischen Prozess auf

Sonderfälle untersuchen, was mit klassischer Handlungsorientierung so nicht möglich ist; unsere Anschauung wird also erweitert.

Fortwährende Betrachtung der Änderungen

Bei der Bestimmung der Scheitelpunktform einer quadratischen Funktion verdeckt der klassische Zugang über die quadratische Ergänzung für viele Schüler den mathematischen Kern und erhöht die Hürden. Mit einer geeigneten Lernumgebung erhalten wir einen graphischen Zugang: Wir ziehen an einer Parabel und untersuchen die Auswirkung der Veränderung der Lage der Parabel auf den Funktionsterm, und können so den Aufbau der Scheitelpunktform verstehen.

Sich nicht von der Macht des Kalküls berauschen lassen

Die *p*-*q*-Formel gehört zum unerschütterlichen Arsenal des Mathematikunterrichts (‚Mitternachtsformel'). Den Bildungswert von auswendig gelernten Formeln kann man jedoch bezweifeln. Nicht ohne Grund kam es zur Diskussion, welche handwerklichen Rechenkompetenzen im CAS-Zeitalter noch unverzichtbar sind. Das bloße Ablesen der Lösungen im Taschenrechner hat jedenfalls keinen Bildungswert. Einen solchen sehe ich aber wohl in dem Zusammenhang zwischen Scheitelpunkt *S* und Nullstellen, der dann in der Formel $x_{1,2} = x_S \pm \sqrt{-y_S}$ mündet.

Funktion in geometrischem Gewande

Die Einführung des Sinus über rechtwinklige Dreiecke behindert das Verständnis des Sinus als Funktion, sowohl wegen der Beschränkung auf Winkel bis 90° als auch wegen Gradmaß statt Bogenmaß im Argument. Durch eine geeignete geometrische Konstruktion können wir aus einer Kreisbewegung von *P* einen Punkt *P''* konstruieren, dessen Bahn uns graphisch die Sinuskurve als Ortslinie liefert.

Bedeutende Ideen mit geringem formalen Aufwand vermitteln

Mit der ‚Funktionenlupe' bekommen wir einen anschaulichen und kalkülfreien Zugang zu Steigung und Ableitung durch die Visualisierung der lokalen Linearität und durch ein anschauliches Verständnis von Tangente als Schmiegegerade (ELSCHENBROICH, 2015). Mit einem Schieberegler können wir die Variable *h* steuern und damit einen Ausschnitt des Graphen lokal zoomen, bis er wie eine Gerade aussieht. Deren Steigung nehmen wir als lokale Steigung des Funktionsgraphen von *f*. Weiter können wir zu einem Punkt $(x, f(x))$ auf dem Graphen von *f* zwei weitere Punkte $(x \pm h, f(x \pm h))$ und damit zwei Sekanten erzeugen. Für immer kleinere *h* erleben wir das anschauliche Zusammenfallen der beiden Sekanten zur Tangente. Natürlich hat dies eine Schranke (hier $h = 0.0001$) und ist kein echter Grenzwert-Prozess, ermöglicht aber eine tragfähige Vorstellung.

Keine Vernebelung der Ideen

Neben der Steigung ist die Krümmung ein weiterer wichtiger Begriff mit großer Alltagsbedeutung. Dennoch wird die Krümmung (als Maß, jenseits des Vorzeichens) in der Schule nicht behandelt, weil der analytische Zugang über das Schulniveau weit hinausgeht. Mit den drei Punkten aus der Funktionenlupe können wir nun einen anschaulichen geometrischen Weg gehen, indem wir mit diesen Punkten einen Kreis konstruieren und dessen Verhalten wieder für immer kleinere h untersuchen. Der Kreis stabilisiert sich schließlich, und aus dem Radius des Schmiegekreises gewinnen wir anschaulich und in guter Näherung die Krümmung als Kehrwert (betraglich, ggf. zusätzlich noch das Vorzeichen von f“ hinzuziehen).

5. Fazit

Computer haben zwar einen Bildschirm, sind aber nicht per se anschaulich. Sie können die Wahrnehmung erweitern, können sie aber auch erschlagen. Dynamische Visualisierungen können die Anschauung erweitern, Einsehen und Verstehen unterstützen, wenn sie einem didaktischen Konzept folgen und Lernaktivitäten, Entdecken und Durchdenken ermöglichen. Die Lehrkräfte müssen dabei bereit sein, sich auf Phänomene, die solche dynamischen Visualisierungen und Lernumgebungen als black box liefern, einzulassen und sie zu akzeptieren, und sich nicht nur auf Anschauung im engeren Sinne beschränken.

Literatur

ELSCHENBROICH, H.-J. (2015): Die interaktive Funktionenlupe - Ein neuer Vorschlag zur visuellen Vermittlung von Grundvorstellungen der Analysis. In: *Beiträge zum Mathematikunterricht 2015*. Münster, WTM, 264 -267

GUTZMER, A. (1908): Bericht betreffend den Unterricht in der Mathematik an den neunklassigen höheren Lehranstalten. Reformvorschläge von Meran. Nachdruck in: *Der Mathematikunterricht 26* (1980) Nr. 6, 53 – 62

KANT, I. (1781): Kritik der reinen Vernunft. Nachdruck 1990, Hamburg: Felix Meiner, Kap. 22 und Kap. 115

KLEIN, F. (1933): Elementarmathematik vom höheren Standpunkte aus. Erster Band. Nachdruck 1968. Berlin, Heidelberg: Springer, 6

LIETZMANN, W. (1916): Methodik des mathematischen Unterrichts. 2. Teil. Leipzig: Quelle und Meyer, 340

PESTALOZZI, H. (1801): Wie Gertrud ihre Kinder lehrt. ebook Kindle Edition. Amazon. IV. Brief und IX. Brief

VOLLRATH, H.-J. (1978): Rettet die Ideen! In: *MNU 8/1978*, 449 - 455

WAGENSCHEIN, M. (1977): Rettet die Phänomene! (Der Vorrang des Unmittelbaren). In: *MNU 3/ 1977*, 129 – 137

WIKIPEDIA: https://de.wikipedia.org/wiki/Phänomen Zugriff am 10.3.2018