Hans-Jürgen ELSCHENBROICH, Korschenbroich

Raumgeometrie konkret: Von Kristallen und Polyedern

Raum und Form ist eine der fünf Leitideen der Bildungsstandards. Doch in der schulischen Realität fristet die Raumgeometrie ein Schattendasein. In der Sek I geht es hauptsächlich um Formeln zur Berechnung von Volumen und Oberfläche, in der Sek II wird vektorielle analytische Geometrie mit Schnitt von Geraden und Ebenen betrieben. Kristalle sind ein schönes Thema, sich mit realen 3D Objekten und ihrer mathematischen Modellierung durch einfache Polyeder zu beschäftigen. Während die Kristallographen dazu mächtige Spezialsoftware einsetzen, wird hier GeoGebra als schultypische Geometrie-Software genutzt (ELSCHENBROICH, 2018).

1. Kristall und Modell

Abb. 1: Sonderbriefmarke

In einer Sonderbriefmarke der Deutschen Post (Abb. 1) sehen wir eine Ansammlung von Fluoriten, ein einzelnes Fluorit-Kristall und ein mathematisches Modell, das die symmetrische Durchdringung von zwei gleich großen Würfeln zeigt (s. a. OFFERMANN, 1992).

2. Würfel-Durchdringung

Mit der Geometrie-Software GeoGebra können wir im 3D Fenster die Figur aus der Briefmarke dynamisieren. Ein Würfel wird um seine Diagonale gedreht. Dabei können wir in der virtuellen Umsetzung Urbild und Bild zusammen betrachten und den Drehwinkel α mit einem Schieberegler systematisch variieren. Dabei wird offensichtlich, dass wir für α = 60° (180°, 300°) eine symmetrische Durchdringung haben (Abb. 2).

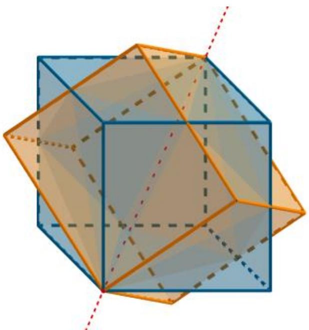

Abb. 2

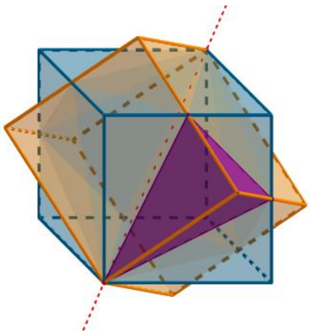

Abb. 3

In Fachgruppe Didaktik der Mathematik der Universität Paderborn (Hrsg.)
Beiträge zum Mathematikunterricht 2018. Münster: WTM-Verlag

3. Überstand

In der Morphologie der Kristalle werden neben der Vereinigung insbesondere die Schnittkörper von Körper-Durchdringungen betrachtet. Wir beschränken uns hier auf Würfel mit einer gemeinsamen Diagonalen und den Drehwinkel $\alpha = 60°$ und markieren einen der überstehenden Teilkörper (Abb. 3). Dies ist offensichtlich eine Pyramide mit dreieckiger Grundfläche und zwei Kanten der Länge $\frac{a}{2}$ und einer Kante der Länge a.

4. Oberfläche und Volumen

Damit ist es möglich, Oberfläche und Volumen dieses Überstands elementar zu berechnen (Aufgabe 1).

Aufgabe 1

Bestimmen Sie Grundfläche und Volumen einer ‚überstehenden' Pyramide.

Tipp: Beim Volumen bietet es sich an, als Grundfläche das kleine rechtwinklig gleichschenklige Dreieck mit den Katheten $\frac{a}{2}$ zu wählen. Dann hat man als Höhe die Kantenlänge a des Würfels.

Lösung

Bei der Grundfläche ist es sinnvoll, subtraktiv vorzugehen.

$$G_{Py} = a^2 - \frac{a^2}{8} - 2\frac{a^2}{4} = \frac{3}{8}a^2 .$$

Beim Volumen ergibt sich: $V_{Py} = \frac{1}{3}\,\frac{a^2}{8}\,a = \frac{a^3}{24}$.

Der innere Schnittkörper entsteht dadurch, dass alle Überstände abgeschnitten werden und ist eine Bipyramide (Abb. 4, 5), deren Volumen und Oberfläche mit Aufgabe 1 elementar berechnet werden kann (Aufgabe 2).

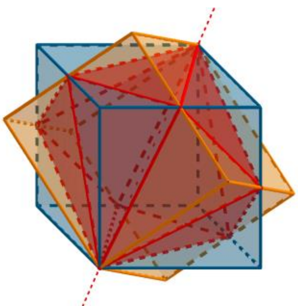

Abb. 4

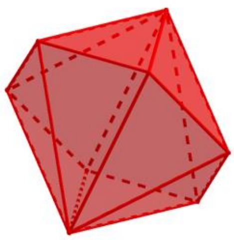

Abb. 5

Aufgabe 2

Bestimmen Sie Oberfläche und Volumen der inneren Bipyramide.

Lösung

Oberfläche: $O = 12\,\frac{3}{8}\,a^2 = \frac{9}{2}\,a^2$. Volumen: $V = a^3 - 6\,\frac{a^3}{24} = \frac{3}{4}\,a^3$.

5. Doppelender

Solche Bipyramiden sind in der Natur selten in Reinform zu finden. Meist ist dies noch mit einem sechsseitigen Prisma kombiniert. Schneidet man im mathematischen Modell noch die Doppelpyramide längs der Diagonalen mit einem sechsseitigen Prisma (Abb. 6), so erhält man eine Form, die in der Kristallographie als ‚Doppelender' bekannt ist und z. B. bei Quarzit und Bergkristallen vorkommt (Abb. 7).

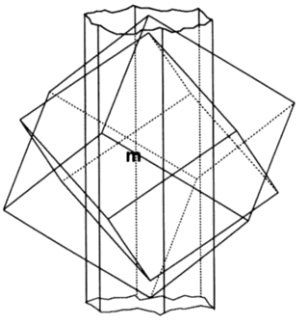

Abb. 6 (OFFERMANN, 1992)

Abb. 7

6. Vertiefung: Weitere Durchdringungen

In einer ersten Vertiefung kann man die symmetrische Durchdringung zweier gleich großer Tetraeder untersuchen. Dabei erhält man als Vereinigung den Keplerstern ‚stella octangula' (Abb. 8).

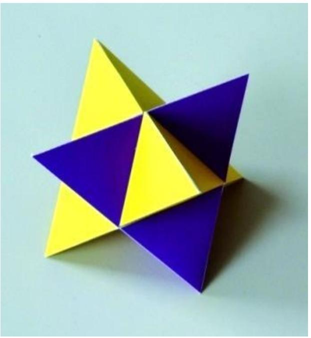

Abb. 8 (www.poeppe-online.de)

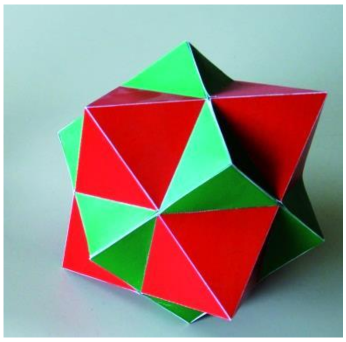

Abb. 9 (www.poeppe-online.de)

Mögliche raumgeometrische Fragestellungen dazu sind:

- Wie kann man aus dem Ursprungs-Tetraeder den zweiten Tetraeder konstruieren?
- Welche Gestalt hat dann der Durchschnitt, von welchen Flächen wird er begrenzt? Wie groß ist seine Oberfläche?
- Wie groß ist sein Volumen im Vergleich zum Tetraeder-Volumen?

Als zweite Vertiefung könnte man dann eine Durchdringung von Würfel und Oktaeder untersuchen (Abb. 9):

- Wie kann man aus dem Ursprungs-Würfel das Oktaeder konstruieren?

- Welche Gestalt hat dann der Durchschnitt, von welchen Flächen wird er begrenzt? Wie groß ist seine Oberfläche?
- Wie groß ist sein Volumen im Vergleich zum Tetraeder-Volumen bzw. Würfel-Volumen?

8. Zum Einsatz digitaler Werkzeuge

Die Vorteile der dynamischen Visualisierung sind offensichtlich: Man kann im digitalen Modell einfach experimentieren, indem man mit einem Schieberegler den Drehwinkel α variiert. Dies wäre weder mit Zeichnungen noch mit Realmodellen so leicht und einsichtig möglich. Des Weiteren ist es so möglich, den Urbild-Würfel und den gedrehten Würfel in einem Bild zusammen zu betrachten. Eine Beschränkung ergibt sich noch gegenüber statischen CAD-Programmen oder speziellen Kristallographie-Programmen, weil in der der aktuellen Version von GeoGebra 3D die Werkzeuge zum Erzeugen von Körpern noch limitiert sind mit der Konsequenz, dass wir meist nicht *einen* Körper als Objekt haben, sondern ein Kompositum von Objekten, das auf dem Bildschirm wie ein Körper aussieht.

9. Fazit

Die Untersuchung von Durchdringungen und Schnittkörpern ist ein schönes, anschauliches und elementares Thema der Raumgeometrie, das (bei geeigneten einfachen Grundkörpern) in der Sekundarstufe I für handlungsorientiertes Erzeugen von Kartonmodellen, für dynamisches Visualisieren mit GeoGebra 3D und für elementare mathematische Berechnungen von Oberflächen und Volumen der Vereinigungs- und Schnittkörper genutzt werden kann und mit der Anwendung auf Kristalle eine Anwendungsorientierung und einen fächerübergreifenden Ansatz zur Chemie bietet. Die Beschränkung auf symmetrische Fälle ist mathematisch völlig ausreichend und berücksichtigt die knappe zur Verfügung stehende Zeit.

Literatur

ELSCHENBROICH, H.-J. (2018): Modellierung der Gestalt von Kristallen. Erscheint in: *MNU journal*.

OFFERMANN, E. (1992). Bergkristalle besser verstehen. In: *extraLapis No.3*, Bergkristall. Christian Weise Verlag, München. S. 42 – 51

Links

Die Karton-Modelle finden Sie auf **www.poeppe-online.de** .

Die GeoGebra-Dateien finden Sie auf **www.geogebra.org/m/ekEJVwvd** .

Sonderbriefmarke: **shop.deutschepost.de/briefmarke-nassklebend-250-jahre-bergakademie-freiberg-70-ct-10er-bogen** .