Anne FELLMANN, Klagenfurt

Verständnis von Brüchen bei Schülerinnen und Schülern zu Beginn der 4. Schulstufe

1. Problemaufriss

Laut österreichischem Lehrplan der Volksschule (2012, S. 157f.) steht die Einführung in das Wesen der Bruchzahlen im Vordergrund: das Entwickeln des Bruchzahlbegriffs, das Darstellen und Verwenden von Bruchzahlen, die sich als Brüche nur mit den Nennern 2, 4, 8 (Konzentration auf Halbe, Viertel und Achtel) schreiben lassen, das Deuten von Brüchen (als Teil eines Ganzen, als Teil einer Menge, als Teil einer Größe, als Division), das *Operative Durchforschen* (Vergleichen von Bruchzahlen, Additives Zerlegen und Ergänzen) und das Arbeiten mit Bruchzahlen in einfachen Sachaufgaben. Gleiches findet man in den österreichischen Bildungsstandards (BIFIE 2011, S. 18) für die 4. Schulstufe thematisiert.

Bei der Zahlbereichserweiterung von den natürlichen Zahlen zu den Bruchzahlen ist ein gründlicher Grundvorstellungswandel der Zahlvorstellung, der Zahldarstellung, der Ordnung sowie der Vorstellungen von Operationen notwendig (Prediger 2004; Hefendehl-Hebeker & Prediger 2006; Prediger 2007), wie folgende Tabelle zu den hierbei auftretenden Diskontinuitäten verdeutlicht.

	Natürliche Zahlen	**Brüche**
Vorstellungen zu den Zahlen	sind in erster Linie die Antwort auf die Frage „Wie viele?“	beschreiben Anteile, relative Anteile, Quotienten, Verhältnisse
Symbolische Repräsentation	haben eine eindeutige symbolische Darstellung	werden durch viele Brüche repräsentiert
Ordnung	haben einen eindeutigen Nachfolger	haben keinen eindeutigen Nachfolger
Operationen Addition/Subtraktion	werden durch natürliche Zahlfolge unterstützt	werden nicht durch natürliche Zahlfolge unterstützt

2. Stand der Forschung

Für den deutschsprachigen Raum seien u.a. folgende Studien zum (elementaren) Bruchzahlverständnis angeführt, welche aufzeigen, dass neben nicht hinreichend entwickelten inhaltlichen Vorstellungen Diskontinuitäten zwischen natürlichen Zahlen und Brüchen Hindernisse beim Aufbau eines konzeptuellen Verständnisses von Brüchen darstellen können.

Studien aus dem deutschsprachigen Raum	**Sample**
Hasemann (1993, 1995)	4., 6. und 7. Schulstufe

Altevogt, Lager und Viet (1995)	2. bis 4. Schulstufe
Neumann (1997)	7. Schulstufe
Rottmann (2006)	letztes Kindergartenjahr und 1. Schulstufe
Wartha (2007)	5. bis 7. Schulstufe

Literatur über den deutschsprachigen Raum zum (elementaren) Bruchzahlverständnis hinaus kann den Veröffentlichungen von Pitkethly und Hunting (1996), Neumann (1997) und Wartha (2007) entnommen werden.

3. Ziele und Forschungsfragen

In der Längsschnittuntersuchung über zwei Jahre geht es darum, das individuelle Verständnis von Brüchen bei Kinder über einen längeren Zeitraum systematisch zu beschreiben und in seiner Vielfalt zu verstehen. In dem hier vorliegenden Beitrag geht es um folgende Fragestellungen:

- Welche Vorkenntnisse, welches Verständnis haben Kinder der 4. Schulstufe von Brüchen aus dem alltäglichen Leben **vor der expliziten Behandlung von Brüchen** im Unterricht?
- Wie zeigen sich die Vorkenntnisse von den natürlichen Zahlen **vor der expliziten Behandlung von Brüchen** im Unterricht im kindlichen Verständnis von Brüchen?
- Gibt es weitere primäre Denkstrukturen zu Beginn der 4. Schulstufe, wie z.B. das Festhalten am „Part-whole model“ und/oder am „Knowledge of ½“ (Pitkethly & Hunting 1996), die sich bei der Konstruktion von Brüchen zeigen?

4. Methodische Überlegungen

Der Umfang der Stichprobe in dieser Längsschnittstudie umfasst zu Beginn 40 Kinder aus zwei 4. Parallelklassen einer Volksschule und im darauffolgendem Schuljahr dieselben Kinder der 5. Schulstufe, welche dann in der *Praxis Neuen Mittelschule* beschult werden. Mit den Kindern der Volksschule wurde im Oktober/November 2017 jeweils ein Interview geführt, die zweite Interviewrunde zum Bruchverständnis nach der expliziten Thematisierung im Unterricht wird sich im März 2018 anschließen.

Für den vorliegenden Beitrag wurde eine Reduzierung der Fälle auf sechs Interviews der ersten Interviewrunde vom Oktober/November 2017 vorgenommen. Es handelt sich dabei um sechs zufällig ausgewählte Kinder (zwei Jungen, vier Mädchen) aus den beiden erwähnten Parallelklassen der 4. Schulstufe. Die Darstellung der Ergebnisse hat den Anspruch, Denkwege und Lösungsmuster der Kinder in ihrer Vielfalt zu beschreiben. Diese werden im Anschluss auf Grundlage der drei Forschungsfragen interpretiert.

Die Interviews mit den Kindern sind als halbstandardisierte klinische Interviews konzipiert. Diese erfolgen gemäß der „revidierten klinischen Methode“ nach Piaget (vgl. Selter & Spiegel 1997, S. 100ff.) und dauerten je nach Arbeitstempo des Kindes ca. 30 bis 35 Minuten.

Zur Auswertung wird die explorativ-paraphrasierende Interpretation (Beck & Maier 1994, S. 48f.) herangezogen. Der Leitfaden der Interviews umfasst Aufgaben zum Alltagsverständnis von Kindern zu Brüchen sowie Aufgaben, die auf Grundlage der vorgesehenen Lehrplaninhalte konzipiert wurden. Für diesen Beitrag wurden drei von insgesamt sieben Aufgaben des Leitfadens ausgewählt.

5. Erste Ergebnisse und Interpretationen der Interviews

1. <u>Zeigen/Darstellen von Bruchteilen bei vier Objekten</u> (Objekt rund und kontinuierlich; Objekt rechteckig und kontinuierlich; Objekt rechteckig, diskret, strukturiert, zusammenhängend; Objekt rechteckig, diskret, strukturiert, nicht zusammenhängend): Die Ergebnisse zeigen auf, dass das Wissen über die natürlichen Zahlen, insbesondere das algorithmische Halbieren bzw. das Wissen über die Hälfte (Pitkethly & Hunting 1996, S. 10f.; Hasemann 1995, S. 12), an kreisförmigen Figuren prägend ist. Bei einem Kind wird deutlich, dass ein Viertel ein kleines Tortenstück und das Achtel ein noch kleineres Tortenstück mit fester Fläche ohne Bezug zum Ganzen ist. Auch das Achteln mittels vertikaler und/oder horizontaler Achse (nicht durch den Mittelpunkt gehend) lässt sich rekonstruieren. Ein konstant gleichartiges Vorgehen bei allen vier Objekten lässt sich bei drei von sechs Kindern rekonstruieren.

2. <u>Erkennen von Bruchteilen an zwei Figuren</u> (Figur kreisförmig, kontinuierlich; Figur rechteckig, diskret, nicht zusammenhängend): Die Kinder halten an der Kardination der natürlichen Zahlen fest und sind sich der Trias von Teil, Anteil und Ganzen noch kaum bis gar nicht bewusst (mit Ausnahme eines Kindes bei der kreisförmigen Figur).

3. <u>Verteilaufgaben</u> (Teil eines Ganzen, Teil mehrerer Ganzer): Die Kinder *arbeiten* sich an der nicht eindeutigen symbolischen Repräsentation von Brüchen mittels Vergröbern und Verfeinern im Gegensatz zur eindeutigen symbolischen Zahldarstellung bei den natürlichen Zahlen *ab*.

Ein Kind versteht Brüche als Symbole für feste Flächenteile wie bei der Uhr und nutzt diese Vorstellung zum Lösen der Aufgaben. Auch Weiterentwicklungen von Vorstellungen (hier hinsichtlich der Gleichwertigkeit von Brüchen) durch kognitive Konflikte bei den Kindern innerhalb der Interviews werden deutlich. So erkannte ein Kind während des Interviews, dass der Anteil, den zwei Kinder von einer Pizza bekommen, davon abhängt, in welche Teile (Halbe, Viertel, Achtel) eine Pizza vor dem Verteilen eingeteilt wurde.

6. Ausblick

Erst nach unterrichtlicher Thematisierung von Brüchen wird man Aussagen darüber treffen können, wie sich das Vorverständnis von den natürlichen Zahlen bei der Weiterentwicklung der Konstruktion von Konzepten über Brüche auswirkt, weiters, welche Verlaufsformen, welche Denkstrukturen und Lösungsmuster bei der Entwicklung eines konzeptuellen Verständnisses zu beobachten sind und ob sich durch unterrichtliche Thematisierung bereits ein differenziertes Begriffsverständnis zu Brüchen rekonstruieren lässt.

7. Literatur

Altevogt, B., Lager, M. & Viet, U. (1995). Untersuchungen zum Grundverständnis von Grundschülern – Warum ist ¼ von 32 gleich 7? *Mathematik lehren*, Heft 73, S. 8-11.

Beck, Ch. & Maier, H. (1994). Zu Methoden der Textinterpretation in der empirischen mathematikdidaktischen Forschung. In H. Maier et al. (Hrsg.), *Verstehen und Verständigung* (S. 43-76). Köln: Aulis.

Bundesinstitut für Bildungsforschung, Innovation & Entwicklung des österreichischen Schulwesens (BIFIE) & Bundesministerium für Unterricht, Kunst und Kultur (BMUKK) (Hrsg.) (2011). *Praxishandbuch für „Mathematik" 4. Schulstufe*. Graz: Leykam.

Hasemann, K. (1993). Missverständnisse beim Bruchrechnen – Missverständnisse der Division. *Mathematik in der Schule*, 2. Jg., Heft 31, S. 70-78.

Hasemann, K. (1995). Individuelle Unterschiede. *Mathematik lehren*, Heft 73, S. 12-16.

Hefendehl-Hebeker, L. & Prediger, S. (2006). Unzählig viele Zahlen: Zahlbereiche erweitern – Zahlvorstellungen wandeln. *Praxis der Mathematik in der Schule*, 48. Jg., Heft 11, S. 1-7.

Lehrplan der Volksschule (2012). Verordnung des Bundesministeriums für Bildung. BGBI. Nr. 134/1963 in der Fassung BGBl. II Nr. 303/2012 vom 13. September 2012.

Neumann, R. (1997). *Probleme von Gesamtschülern bei ausgewählten Teilaspekten des Bruchzahlbegriffs. Eine empirische Untersuchung.* Lage: Jacobs.

Pitkethly, A. & Hunting, R. (1996). A review of recent research in the area of initial fraction concepts. *Educational Studies in Mathematics*, 30. Jg., Heft 1, S. 5-38.

Prediger, S. (2004). Brüche bei den Brüchen – aufgreifen oder umschiffen. *Mathematik lehren,* Heft 123, S. 10-13.

Prediger, S. (2007). Konzeptwechsel in der Bruchrechnung – Analyse individueller Denkweisen aus konstruktivistischer Sicht. *Beiträge zum Mathematikunterricht*. Hildesheim, Berlin: Franzbecker, S. 203-206.

Rottmann, T. (2006). *Das kindliche Verständnis der Begriffe „die Hälfte" und „das Doppelte". Theoretische Grundlegung und empirische Untersuchung.* Hildesheim, Berlin: Franzbecker.

Selter, Ch. & Spiegel, H. (1997). *Wie Kinder rechnen.* Leipzig: Ernst Klett Verlag.

Wartha, S. (2007). *Längsschnittliche Untersuchungen zur Entwicklung des Bruchzahlbegriffs.* Hildesheim, Berlin: Franzbecker.