Frank FEUDEL, Berlin

Verständnis der Ableitung im Kontext der Grenzkosten in der Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler

Einleitung

Das Konzept der Ableitung spielt eine wesentliche Rolle in den Wirtschaftswissenschaften. Studierende der Wirtschaftswissenschaften sollten daher in der Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler ein adäquates Verständnis des Konzepts und dessen Anwendung in den Wirtschaftswissenschaften erwerben. Für Letzteres ist es wichtig, dass die Studierenden Werte der Ableitung in ökonomischen Kontexten interpretieren können. Ein Verständnis der in der Ökonomie üblichen Interpretation als Zuwachs der Funktion bei Erhöhung der Produktion um eine Einheit ist aber nicht trivial, und steht im Widerspruch zum Vorwissen der Studierenden zur Ableitung. Daher sollte sie sorgfältig mit deren Vorwissen verknüpft, und gerechtfertigt werden. In diesem Beitrag wird eine Studie vorgestellt, mit der untersucht wurde, inwieweit Studierende der Wirtschaftswissenschaften nach Besuch ihrer mathematischen Lehrveranstaltung am Beispiel der Grenzkosten eine adäquate Verbindung zwischen der Ableitung und ihrer ökonomischen Interpretation herstellen können.

Die Problematik der ökonomischen Interpretation der Ableitung – stoffdidaktische Überlegungen

Wie bereits erwähnt, ist ein Verständnis der ökonomischen Interpretation der Ableitung nicht trivial, was am Beispiel der Grenzkosten, der Ableitung $K'(x)$ einer Kostenfunktion, erklärt werden soll. Werte der Grenzkosten $K'(x)$ werden in der Ökonomie häufig als Zusatzkosten der nächsten Einheit interpretiert (Schierenbeck & Wöhle, 2003). Nimmt man diese Interpretation jedoch wörtlich, so entspricht ihr eigentlich ein anderes mathematisches Objekt, nämlich die Kostendifferenz $K(x+1)-K(x)$. Diese unterscheidet sich von der Ableitung in der Einheit (die Ableitung ist eine Änderungsrate, die Kostendifferenz nicht) und in der Regel numerisch. Der numerische Unterschied kann für die den Studierenden aus der Schule bekannten Funktionen auch nicht vernachlässigt werden. Daher widerspricht die ökonomische Interpretation der Ableitung zunächst dem Vorwissen der Studierenden zum Ableitungskonzept. Sie sollte deshalb gut mit diesem Vorwissen verknüpft und für ökonomische Kontexte gerechtfertigt werden.

Eine mögliche Verbindung zwischen $K'(x)$ und $K(x+1)-K(x)$ wäre die Formel $K(x+h)-K(x) \approx K'(x) \cdot h$ für $h \approx 0$. Hinter ihr steckt die Idee der lokalen linearen Approximation (Feudel, 2017a). Da $h = 1$ in der Ökonomie klein ist, geht man in der Ökonomie oft davon aus, dass die numerischen Werte von $K'(x)$ und $K(x + 1) - K(x)$ annähernd gleich sind. Gegebenenfalls muss die Einheit verkleinert werden (Reiß, 2007). Eine im Kontext genügend kleine Einheit bezeichnet Reiß auch als *marginale Einheit*. Eine rigorose mathematische Begründung, warum man bei genügend kleinen Einheiten von einer guten Approximation der Ableitung $K'(x)$ durch $K(x + 1) - K(x)$ (oder andersrum) ausgehen kann, befindet sich in Sackarendt (2018).

Die Problematik der ökonomischen Interpretation der Ableitung – bisherige empirische Erkenntnisse

Empirische Studien zeigen, dass die in der Ökonomie vorgenommene Gleichsetzung von $K'(x)$ und $K(x + 1) - K(x)$ für Studienanfänger der Wirtschaftswissenschaften nicht intuitiv ist. In einem im September 2015 durchgeführten Vortest an der Universität Paderborn interpretierten nur 3 von 143 Probanden die Ableitung $K'(x)$ als Zusatzkosten der nächsten (marginalen) Einheit (siehe auch (Feudel, 2017b)). Umgekehrt verwendeten nur 4 der 143 Probanden die Ableitung zur Bestimmung von Zusatzkosten bei Erhöhung einer Produktion von 100 auf 101 Stück. Dementsprechend sollte die ökonomische Interpretation der Ableitung in der Lehrveranstaltung sorgfältig mit dem Vorwissen der Studierenden zur Ableitung verknüpft, und die Gleichsetzung von $K'(x)$ und $K(x + 1) - K(x)$ in der Ökonomie gerechtfertigt werden.

Aber auch nach der mathematischen Lehrveranstaltung demonstrierten viele Studierende der Wirtschaftswissenschaften ein eher oberflächliches Verständnis der ökonomischen Interpretation der Ableitung. So zeigten Mkhatshwa and Doerr (2015), dass Studierende beim Problemlösen die Grenzkosten als Zusatzkosten und nicht als Änderungsrate verstanden, obwohl in dem zugehörigen Mathekurs darauf Wert gelegt wurde. Feudel (2017b) zeigte zudem, dass viele Studierende bei einer Klausuraufgabe zur Interpretation Ableitung $G'(73) = 0{,}2$ [GE/ME] in ihren Antworten *nicht* deutlich machten (83 von 103), dass der Zusatzgewinn der nächsten Einheit nur eine Approximation ist, obwohl im vorherigen Kurs „Mathematik für Wirtschafts-wissenschaftler“ darauf Wert gelegt wurde.

Allerdings ist bei beiden Studien nicht klar, ob den Studierenden die Unterschiede zwischen der Ableitung und ihrer ökonomischen Interpretation wirklich nicht bewusst war, oder ob sie die ökonomische Interpretation der Ableitung bei der Lösung der Aufgaben nur oberflächlich verwendeten. Hier setzt die in diesem Beitrag vorgestellte Studie an.

Design der Studie

Zur Untersuchung der in der Einleitung dargestellten Fragestellung wurden an der Universität Paderborn im SS 2015 acht Studierende interviewt, die die Lehrveranstaltung „Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler I“ erfolgreich absolviert hatten. Die Interviews dauerten jeweils circa 30 Minuten und waren durch folgende Aufgaben strukturiert:

1) Betrachten Sie die Kostenfunktion, die durch folgende Gleichung gegeben ist: $K(x) = \frac{1}{1000}x^3 - \frac{1}{4}x^2 + 21x + 500, x \geq 0$.

   Der Output x ist dabei in Mengeneinheiten, $K(x)$ in Euro angegeben. Was sind die Grenzkosten bei einer Ausbringungsmenge von $x = 100$ Mengeneinheiten? Bestimmen Sie auch die Einheit der Grenzkosten!

2) Ist die Ableitung $K'(x)$ dasselbe wie die Zusatzkosten der nächsten Einheit? Begründen Sie Ihre Antwort.

3) Begründen Sie mit der Graphik (linker Graph in Abbildung 1), weshalb die numerischen Werte von $K'(x)$ und $K(x+1) - K(x)$ bei der Kostenfunktion aus Aufgabe 1 nah beieinander liegen.

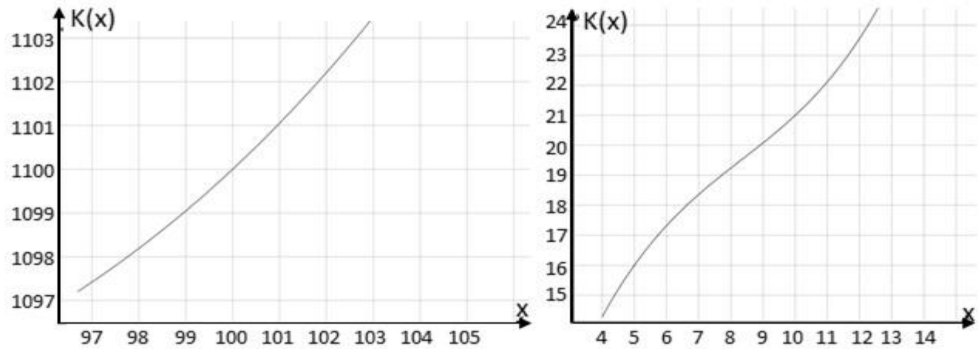

Abb. 1: Graphen der Kostenfunktion der Aufgabe 1 und der Kostenfunktion der Interventionsaufgabe, in der die Zusatzkosten der elften Einheit bestimmt werden sollten

4) Begründen Sie mit Hilfe der Definition der Ableitung, weshalb man in der Ökonomie häufig annehmen kann, dass bei gegebenem Output x die Werte von $\mathrm{K}'(\mathrm{x})$ und $K(x+1) - K(x)$ annähernd gleich sind.

Mit der ersten Aufgabe sollte herausgefunden werden, ob die Studierenden die Grenzkosten zunächst mit der Ableitung oder den Zusatzkosten der nächsten Einheit assoziierten. In der zweiten Aufgabe sollte untersucht werden, inwieweit ihnen Unterschiede zwischen den beiden Objekten $K'(x)$ und $K(x+1) - K(x)$ bewusst waren. Falls sie der Auffassung waren, dass beide Objekte identisch waren, wurden sie vom Interviewer zu den Unterschieden hingeführt. So erhielten sie beispielsweise, falls sie Aufgabe 1 mit der Ableitung gelöst hatten, eine zusätzliche Aufgabe zur

Bestimmung der Zusatzkosten der elften Einheit bei einer Funktion, die nur graphisch gegeben war (rechter Graph aus Abbildung 1). Dies hätte hoffentlich zu einem kognitiven Konflikt geführt, wenn sie jetzt intuitiv nicht mehr die Ableitung, sondern die Kostendifferenz verwendet hätten.

In den Aufgaben 3 und 4 ging es dann um die Rechtfertigung der Gleichsetzung von $K'(x)$ und $K(x+1)-K(x)$. In Aufgabe 3 ging es um die Rechtfertigung auf graphischer Ebene (mögliches Argument: annähernde Linearität der zugehörigen Funktion, siehe linker Graph in Abbildung 1). In Aufgabe 4 ging es um die Rechtfertigung der Gleichsetzung auf symbolischer Ebene über die Definition der Ableitung und die daraus resultierende Approximationsformel $K(x+h)-K(x) \approx K'(x) \cdot h$ für $h \approx 0$ (wie im oberen Teil dieses Beitrags beschrieben und in der Vorlesung vorgeführt).

Ergebnisse

Die Studierenden hatten starke Schwierigkeiten eine adäquate Verbindung zwischen der Ableitung $K'(x)$ und ihrer ökonomischen Interpretation als Zusatzkosten der nächsten Einheit herzustellen. Viele identifizierten einfach beide Objekte miteinander. Detaillierte Ergebnisse zu den Aufgaben 1 und 2 befinden sich in Feudel (2018). Die Publikation weiterer Ergebnisse, insbesondere zu den Aufgaben 3 und 4, ist geplant.

Literatur

Feudel, F. (2017a). Ableitung und Approximation in der Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler, *Beiträge zum Mathematikunterricht*. Potsdam: WTM-Verlag.

Feudel, F. (2017b). Students' interpretation of the derivative in an economic context. In T. Dooley & G. Gueudet (Eds.), *Proceedings of the 10th Congress of the European Society for Research in Mathematics Education*. Dublin: DCU Institute of Education.

Feudel, F. (2018). *C‘* (*x*) = *C*(*x+1*)-*C*(*x*)? – Students‘ connections between the derivative and its economic interpretation in the context of marginal cost, *Proceedings of the Second Conference of the International Network for Didactic Research in University Mathematics*. Kristiansand, Norwegen.

Mkhatshwa, T., & Doerr, H. (2015). Students' understanding of marginal change in the context of cost, revenue, and profit. In K. Krainer & N. Vondrová (Eds.), *Proceedings of the 9th Congress of the European Society for Research in Mathematics Education*. Prag: Charles Universität in Prag, Faculty of Education.

Reiß, W. (2007). *Mikroökonomische Theorie: historisch fundierte Einführung*. München: de Gruyter.

Sackarendt, M. (2018). Zur Verwendung der lokalen linearen Approximationseigenschaft der Ableitung in ökonomischen Anwendungskontexten anhand ausgewählter Schulbuchbeispiele, *Beiträge zum Mathematikunterricht*. Münster: WTM.

Schierenbeck, H., & Wöhle, C. B. (2003). *Grundzüge der Betriebswirtschaftslehre*. München: Oldenbourg.