Yael FLEISCHMANN & Rolf BIEHLER, Paderborn

Analyse der Erkundung von Untervektorräumen bei der Bearbeitung von Präsenzaufgaben durch Studierende in der linearen Algebra

In der Didaktik der linearen Algebra wird dem Thema Vektorräume von jeher eine besondere Bedeutung eingeräumt, da dieses Element des Curriculums in praktisch allen mathematikhaltigen Disziplinen von Bedeutung ist. Studierende in den ersten Semestern ihres Studiums bringen heterogene Vorstellungen von Vektoren mit an die Universität (Mai, Feudel und Biehler, 2017). Die *concept images* zu den Begriffen Vektorraum und Untervektorraum (UVR), die Studierende der linearen Algebra entwickeln, wurden für Studierende an US-amerikanischen Universitäten bereits von Wawro, Sweeney und Rabin (2011) untersucht. Nach Abschluss des Kurses in linearer Algebra wurden hierbei u. a. deutliche Unterschiede in den vorliegenden Vorstellungen von UVR als geometrische bzw. algebraische Objekte festgestellt. Die hier vorgestellte Studie setzt ebenfalls bei der Untersuchung der Entwicklung des Verständnisses von UVR an, beschreibt allerdings den Zugang deutscher Studierender unmittelbar nach der Einführung von (Unter-)Vektorräumen in der Vorlesung.

Studienaufbau und Aufgabenstellung

Gegenstand der Studie sind die Auswertungen zu Bearbeitungen einer Aufgabe (siehe Abbildung 1), die im Rahmen der Veranstaltung „Lineare Algebra 1" im Wintersemester 2016/2017 an der Universität Paderborn als Teil eines Präsenzübungsblattes gestellt wurde.

Aufgabe Welche der in (a) bis (e) angegebenen Teilmengen des $\mathbb{R}^2$ sind Vektorräume bezüglich der auf $\mathbb{R}^2$ definierten Addition und skalaren Multiplikation?

(a) $M_1 = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 + 2x_2 = 0\}$

(b) $M_2 = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 + 2x_2 = 1\}$

(c) $M_3 = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 = -2, x_2 = -1\}$

(d) $M_4 = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 - x_2^2 = 0\}$

(e) $M_5 = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 \geq 0, x_2 \leq 0\}$

(f) Versuchen Sie nun, alle Unterräume des $\mathbb{R}^2$ zu finden. Machen Sie sich klar, warum Sie wirklich *alle* Unterräume gefunden haben. Ein formaler Beweis ist nicht notwendig.

Abbildung 1: Aufgabe zum Thema Vektorräume in der Veranstaltung „Lineare Algebra" im Wintersemester 2016/2017.

Während der Bearbeitungszeit von 90 Minuten arbeiteten die Studierenden einzeln oder in Gruppen an der Aufgabe und hatten die Möglichkeit, Fragen

In Fachgruppe Didaktik der Mathematik der Universität Paderborn (Hrsg.)
Beiträge zum Mathematikunterricht 2018. Münster: WTM-Verlag

an den anwesenden Tutor zu stellen. Ausgewertet wurden für die Studie sowohl die hierbei entstandenen schriftlichen Bearbeitungen von 116 Studierenden, als auch die Videoaufzeichnungen von insgesamt 4 Gruppen von 2 bis 4 Studierenden bei der Bearbeitung der Aufgabe. Durch die Auswertung dieser Daten konnten sowohl die Ergebnisse der Aufgabenbearbeitung als auch die Bearbeitungsprozesse und Hürden auf dem Weg zu einer Lösung untersucht und analysiert werden. Während die Teile a) bis e) als Aufgaben mit Verbindungspotential (gemäß der Einstufung von Frovin Gravesen, Grønbæk und Winsløw, 2016) zum Schulwissen konzipiert wurden, kann Aufgabenteil f) entsprechend als Aufgabe mit Forschungspotential eingestuft werden, für die kein standardisierter Lösungsweg zur Verfügung stand und die zu forschungsähnlichem Arbeiten anregen sollte. Aus diesem Grund stellt Aufgabenteil f) die Hauptschwierigkeit und das Ziel der gesamten Aufgabenstellung dar. Wir beschränken uns im Folgenden nur auf die Ergebnisse der schriftlichen Bearbeitungen dieses Aufgabenteils. (Für nähere Analysen zu den Aufgabenteilen a) bis e) vgl. Fleischmann und Biehler, 2017; für Ergebnisse der Videostudien vgl. Fleischmann und Biehler, 2018).

Analyse und Methodik

Zur Analyse der schriftlichen Bearbeitungen der Aufgabenstellung wurde eine sogenannte *student expert solution* (*ses*) entwickelt (vgl. Biehler, Schaper und Kortemeyer, 2014). Dabei handelt es sich um eine Musterlösung, die auf dem inhaltlichen Niveau der Studierenden zum Zeitpunkt der Bearbeitung der Aufgabe basiert und zusätzliche Meta-Informationen zur Aufgabenstellung (explizite und implizite Kompetenzerwartungen, verschiedene Lösungsansätze, Lernziele usw.) enthält. Bei der Auswertung wurde ein zweistufiger Prozess durchlaufen. In der ersten Sichtung wurden hierbei häufige Fehler und Lösungsansätze in den Bearbeitungen identifiziert und kategorisiert. Darauf aufbauend wurde ein Codierungssystem entwickelt, anhand dessen bei einer zweiten Sichtung alle Bearbeitungen codiert wurden. Da die *ses* an dieser Stelle nicht vollständig wiedergegeben werden kann, fokussieren wir uns auf die Angabe der drei Hauptschritte, die bei der Lösung von Aufgabenteil f) zu durchlaufen sind (für eine ausführlichere Lösung der Aufgabe vgl. Fleischmann und Biehler, 2018). Die Bearbeitung der Aufgabe durch die Studierenden erfolgte ohne die Vorgabe einer solchen Gliederung; sie dient der Analyse der Bearbeitungen.

Schritt 1: Angabe aller UVR. Hierbei müssen sowohl die beiden trivialen UVR ($\mathbb{R}^2$ sowie der Nullraum) als auch die 1-dimensionalen UVR gefunden und benannt werden. Für die Beschreibung letzterer standen den Studierenden verschiedene Möglichkeiten offen (der Begriff der Dimension war zu diesem Zeitpunkt noch nicht aus der Vorlesung bekannt), die drei Kategorien (*relationale*, *konstruktive*, *geometrische* Beschreibung; für beispielhafte Mengen zu diesen Beschreibungen siehe Abbildung 2) zugeordnet wurden.

Schritt 2: *Verifikation der UVR-Eigenschaft für die angegebenen Mengen*. Hierzu kann z. B. algebraisch oder geometrisch anhand des aus der Vorlesung bekannten Unterraumkriteriums argumentiert oder auf einen früheren Aufgabenteil referenziert werden.

Schritt 3: *Begründung, dass tatsächlich alle UVR gefunden wurden*. Aufgrund der hohen Komplexität eines formalen algebraischen Beweises wurde dieser von den Studierenden an dieser Stelle nicht erwartet oder gefordert. Stattdessen wurden unterschiedliche Begründungsansätze akzeptiert, z. B. kann ausgehend vom Nullvektor durch Hinzunahme weiterer Vektoren sukzessive ein größerer UVR konstruiert werden. Dabei wird nachgewiesen, dass so nur die in Schritt 1 angegebenen UVR unter Berücksichtigung der Abgeschlossenheit von Addition und Multiplikation konstruierbar sind.

Bei der Analyse standen die folgenden Forschungsfragen im Fokus:
1. Wie häufig wurden die trivialen UVR bzw. die 1-dimensionalen UVR genannt? Welche Beschreibungen für letztere wurden dabei verwendet?
2. Welche Begründungen wurden angeführt, bzw. auf welche der oben genannten Schritte 1–3 wurde in den Bearbeitungen eingegangen?

Auszug aus den Ergebnissen der Auswertungen der Studie

Von den insgesamt 116 vorliegenden Lösungsbögen der Studierenden zu der gesamten Aufgabe enthielten nur 48 Bearbeitungen von Aufgabenteil f).

Triviale UVR	$\mathbb{R}^2$	33
	Nullraum	32
1-dim UVR	Lösungen, in denen 1-dimensionale UVR genannt wurden insgesamt (teilweise mehr als eine Beschreibung pro Lösung verwendet)	33
	– Relationale Beschreibung: $M_{a,b} = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : ax_1 + bx_2 = 0\}$	24
	– Konstruktive Beschreibung: $L_x := \{v \in \mathbb{R}^2 \mid v = \lambda x, \lambda \in \mathbb{R}\}$	4
	– Geometrische Beschreibung: *Gerade durch die Null, Ursprungsgerade etc.*	12

Abbildung 2: Angaben von UVR in den schriftlichen Bearbeitungen von Teil f), mit Aufschlüsselung nach Beschreibungstyp (einschließlich Mehrfachnennungen; N=116).

In Abbildung 2 sind Häufigkeiten der Angaben der unterschiedlichen Typen von Untervektorräumen (entsprechend Schritt 1) sowie die Häufigkeiten der verwendeten unterschiedlichen Schreibweisen aufgeführt. Eine Angabe von Begründungen gemäß der Schritte 2 und 3 der obigen Gliederung der Lösung war bei der Mehrheit der Bearbeitungen (34 bzgl. Schritt 2; 35 bzgl. Schritt 3) nicht enthalten. Lediglich zwei (bzgl. Schritt 2) bzw. ein (bzgl. Schritt 3) Teilnehmer begründeten die jeweiligen Schritte korrekt und vollständig. Der

Mangel an Begründungen ist möglicherweise auf die Formulierung der Aufgabenstellung zurückzuführen, die von den Studierenden so missinterpretiert worden sein könnten, dass gar keine Begründung erforderlich sei.

Fazit und Ausblick

Als besondere Schwierigkeit bei der Bearbeitung der Aufgabe konnte u. a. die Verknüpfung mit Schulwissen (insbesondere zur geometrischen Interpretation von Vektorräumen) festgestellt werden. Aus den Videostudien ging hervor, dass insbesondere der für Schritt 3 erforderliche Argumentationsprozess meist nur unter Anleitung eines Tutors erfolgreich durchlaufen werden konnte. Auf dieser Grundlage wurde die Aufgabenstellung überarbeitet, wobei u. a. die geometrische Vorgehensweise in vorgelagerten Aufgaben vorbereitet wurde. Die Aufgabenstellung von Teil f) wurde in eine eigenständige Aufgabe ausgelagert und zu der Vorgehensweise entlang der Schritte 1 bis 3 sowie zur Angabe von Begründungen jeweils explizit aufgefordert. Diese überarbeitete Aufgabe wurde im Wintersemester 2017/2018 in der Veranstaltung „Lineare Algebra 1“ gestellt. Hierbei fand eine weitere Begleitstudie statt. Aus der laufenden Auswertung der hierbei gewonnenen Daten erhoffen wir uns Erkenntnisse über die Effekte der detaillierteren Vorbereitung und der veränderten Aufgabenstellung.

Literatur

Biehler, R., Kortemeyer, J. & Schaper, N. (2015). Conceptualizing and studying students' processes of solving typical problems in introductory engineering courses requiring mathematical competences. In K. Krainer & Nad'a Vondrová (Eds.), *Proceedings of the CERME 9* (S. 2060-2066). Prag: Charles University, and ERME

Fleischmann, Y. & Biehler R. (2017). Analyse von Studierendenbearbeitungen von Präsenzaufgaben in der linearen Algebra . *In Institut für Mathematik der Universität Potsdam (Hrsg.), Beiträge zum Mathematikunterricht 2017* (S. 231-234). Münster: WTM.

Fleischmann, Y. & Biehler, R. (2018). Students' problems in the identification of subspaces in Linear Algebra. *Pre-Proceedings of INDRUM 2018* (S. 234-243), Kristiansand*:* Universitetet i Agder.

Frovin Gravesen, K., Grønbæk, N. & Winsløw, C. (2016). Task Design for Students' Work with Basic Theory in Analysis: the Cases of Multidimensional Differentiability and Curve Integrals. *International Journal of Research in Undergraduate Mathematics Education*, 3, S. 9-33.

Mai, T., Feudel, F. & Biehler, R. (2017). A vector is a line segment between two points? – Students' concept definitions of a vector during the transition from school to university. In T. Dooley & G. Guedet (Eds.), *Proceedings of the Tenth Congress of the CERME10* (S. 2185-2192). Dublin: DCU Institute of Education, and ERME.

Wawro, M., Sweeney, G. & Rabin, J. (2011). Subspace in linear algebra: investigating students' concept images and interactions with the formal definition. *Educational Studies in Mathematics*, 78, S. 1-19.