Daniel FROHN, Bielefeld

Die orthogonale Projektion als fundamentale Idee in der elementaren und analytischen Geometrie – Vorschläge zur Herausbildung von Grundvorstellungen

Die Orientierung an fundamentalen Ideen wird als wichtige Leitlinie eines verständnisfördernden und allgemeinbildenden Mathematikunterrichts angesehen (Borneleit et al., 2001). In diesem Beitrag soll aufgezeigt werden, dass die orthogonale Projektion eine Idee der elementaren und analytischen Geometrie ist, die in verschiedenen Grundvorstellungen konkretisiert werden kann und ein vertieftes Verständnis mathematischer Inhalte ermöglicht.

1. Fundamentale Ideen und Grundvorstellungen

Die Begriffe universelle Ideen, fundamentale Ideen bzw. Leitideen werden nicht immer trennscharf verwendet. Henn/Filler (2014) listen 14 Fundamentale Ideen für die Koordinaten- und Vektorgeometrie sowie die Lineare Algebra auf, und Tietze (2000, S.71) formulierte 7 fundamentale Ideen für die Analytische Geometrie/Lineare Algebra. Zur Bedeutung von fundamentalen Ideen für den Mathematikunterricht schreibt er (ebd., S.69): „*Die Betonung fundamentaler Ideen beeinflußt nicht nur die Auswahl von Inhalten, sondern mehr noch die didaktisch-methodische Perspektive, unter der Inhalte gesehen werden können […] und die Auswahl der Unterrichtsform […]. Das gilt insbesondere auch für die Art, wie Inhalte innerhalb eines Themenkreises miteinander vernetzt und wie sie auf andere Themenkreise bezogen werden.*“ Im Folgenden wird gezeigt, wie durch die Idee der Projektion Inhalte im Mathematikunterricht der Sekundarstufen vernetzt und dadurch tragfähige Grundvorstellungen aufgebaut werden können.

2. Orthogonale Projektionen im MU der Sekundarstufen

Eine orthogonale Projektion der Ebene (oder des Raumes) auf eine Gerade (oder eine Ebene) ist eine Abbildung, die jedem Punkt P der Ebene denjenigen Bildpunkt P' der Geraden zuordnet, für den die Strecke PP' orthogonal zur Geraden (Ebene) ist. Eine Anknüpfung an einen bekannten Sachzusammenhang besteht im Schattenwurf bei parallel einfallendem Licht. Obwohl der *Begriff* der orthogonalen Projektion in Lehrplänen und Schulbüchern der Sekundarstufen kaum explizit auftritt, spielt der *Vorgang* der orthogonalen Projektion aber in einigen Zusammenhängen der elementaren und analytischen Geometrie eine Rolle:

Umgang mit kartesischen Koordinaten: Beim *Einzeichnen* eines Punktes $(x|y)$ in ein Koordinatensystem geht man ausgehend vom Ursprung x Ein-

In Fachgruppe Didaktik der Mathematik der Universität Paderborn (Hrsg.)
Beiträge zum Mathematikunterricht 2018. Münster: WTM-Verlag

heiten nach rechts und y Einheiten nach oben. Beim *Ablesen* der Koordinaten eines Punktes kann man dies nicht ohne weiteres rückwärts durchführen, sondern benötigt die Idee, den Punkt jeweils senkrecht auf die Koordinatenachsen zu projizieren. Wieder aufgegriffen wird diese Sichtweise bei der Deutung der Kathetenlängen eines Steigungsdreiecks bei linearen Funktionen sowie bei der geometrischen Interpretation des Differenzenquotienten in der Analysis.

Abstandsbegriff: Der Abstand eines Punktes von einer Geraden ergibt sich als Länge der Verbindungsstrecke zwischen dem Punkt und seinem orthogonal auf die Gerade projizierten Bildpunkt (Lotfußpunkt). Entsprechende Lotfußpunkte können für die Abstandsbestimmungen in der analytischen Geometrie verwendet werden.

Höhen im Dreieck und in weiteren Figuren und Körpern: Die Höhen im Dreieck ergeben sich als Verbindungsstrecke einer Ecke mit dem Lotfußpunkt auf der gegenüberliegenden Seite (bzw. deren Verlängerung). Dreiecke mit gleicher Höhe (also gleichem Flächeninhalt) können als solche mit gleicher Projektion gedeutet werden. Entsprechendes gilt für Parallelogramme, Trapeze, Pyramiden etc.

Sinus und Kosinus, Skalarprodukt: Siehe die folgenden Abschnitte.

3. Grundvorstellungen zu Sinus und Kosinus

Zum Sinus und Kosinus an rechtwinkligen Dreiecken und zur Sinus- und Kosinusfunktion lassen sich normativ vier für die Schule relevante Grundvorstellungen identifizieren (siehe dazu Salle/Frohn (2017)):

- **Verhältnis-Vorstellung**: Sinus bzw. Kosinus als Verhältnis der Länge der Ankathete bzw. Gegenkathete zur Länge der Hypotenuse
- **Projektions-Vorstellung**: Sinus bzw. Cosinus als Verkleinerungsfaktor für die Länge der Hypotenuse, um die Länge der Ankathete bzw. Gegenkathete zu erhalten (siehe Abb. 1)
- **Einheitskreis-Vorstellung**: Sinus bzw. Kosinus als y- bzw. x-Koordinate eines Punktes auf dem Einheitskreis
- **Oszillations-Vorstellung**: Sinus bzw. Kosinus als funktionale Beschreibung stetig oszillierender Vorgänge

Mit Hilfe der Projektions-Vorstellung kann der Übergang zur funktionalen Betrachtung von Sinus und Kosinus gut vollzogen werden, da am Einheitskreis auch für Winkel größer als 90°, in denen kein rechtwinkliges Dreieck mehr vorliegt, mittels der Projektionen auf die Koordinatenachsen die Werte der Sinus- und Kosinusfunktion bestimmt werden können.

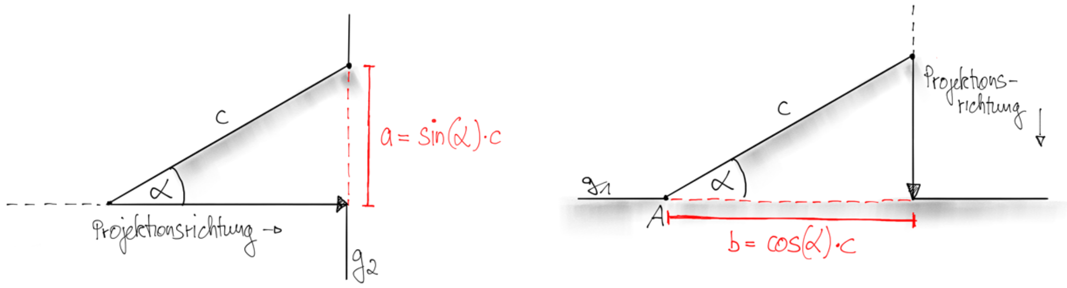

Abbildung 1: Projektions-Vorstellung zu Sinus und Kosinus an rechtwinkligen Dreiecken

Aber auch schon bei rechtwinkligen Dreiecken bietet die Projektions-Vorstellung Vorteile: Wird nur mit der Verhältnis-Vorstellung operiert, führt dies dazu, dass bei der Berechnung von Kathetenlängen aus gegebener Winkelgröße und Hypotenusenlänge immer ein algebraischer Zwischenschritt erforderlich wird, in dem z.B. die Gleichung $\sin(\alpha) = a/c$ umgeformt wird zu $a = c \sin(\alpha)$. Die Projektions-Vorstellung liefert hier einen direkteren und anschaulicheren Zugang. Werden darüber hinaus zwei Projektionen hintereinandergeschaltet (dies ist zum Beispiel bei einem elementargeometrischen Beweis der Additionstheoreme oder bei der Herleitung von Kugelkoordinaten der Fall), so wird dieser Vorzug der Projektions-Vorstellung besonders deutlich. Eine weitere Möglichkeit zur Anwendung der Projektions-Vorstellung bietet das Skalarprodukt.

4. Grundvorstellungen zum Skalarprodukt

Grundlegend für das Verständnis und die Anwendung des Skalarproduktes (*kurz*: SP) im $\mathbb{R}^2$ bzw. $\mathbb{R}^3$ ist die Äquivalenz von arithmetischer und geometrischer Form: $a_1b_1 + a_2b_2$ $(+\ a_3b_3) = |\boldsymbol{a}|\ |\boldsymbol{b}| \cos(\alpha)$, wobei a_i, b_i die Komponenten der Vektoren $\boldsymbol{a}$ und $\boldsymbol{b}$ und α den von $\boldsymbol{a}$ und $\boldsymbol{b}$ eingeschlossenen Winkel bezeichnen. Ein Weg zur Einführung des SP, der diese Äquivalenz nicht nur herleitet, sondern auch den Aufbau von Grundvorstellungen ermöglicht, sei hier kurz skizziert. Die arithmetische Definition lässt sich mit Hilfe einer vektoriellen Deutung des Satzes des Pythagoras und seiner Umkehrung motivieren: Ein von zwei Vektoren $\boldsymbol{a}$ und $\boldsymbol{b}$ aufgespanntes Dreieck ist genau dann rechtwinklig, wenn $a_1b_1 + a_2b_2$ $(+\ a_3b_3) = 0$ gilt. Lässt man die Lernenden die geometrische Bedeutung des Terms $a_1b_1 + a_2b_2$ $(+\ a_3b_3)$ für nicht orthogonale Vektoren mittels einer DGS experimentell erkunden, so lassen sich einige qualitative Beobachtungen zum SP machen (z.B. positive/negative Werte für spitze/stumpfe Winkel). Auf rechnerischer Ebene lässt sich im Fall paralleler Vektoren zeigen, dass das SP dem Produkt der Längen der Vektoren entspricht (mit negativem Vorzeichen, falls diese entgegengesetzt orientiert sind). Weiterhin kann das Distributivgesetz für SP und Vektoraddition nachgewiesen werden. Mittels der Zerlegung des

Vektors $\boldsymbol{b}$ in einen zu $\boldsymbol{a}$ parallelen Anteil $\boldsymbol{b}_{\|}$ und einen zu $\boldsymbol{a}$ orthogonalen Anteil $\boldsymbol{b}_{\perp}$ (siehe Abb. 2) folgt daraus: $\boldsymbol{ab} = \boldsymbol{a}\,(\boldsymbol{b}_{\perp} + \boldsymbol{b}_{\|}) = \boldsymbol{a}\,\boldsymbol{b}_{\perp} + \boldsymbol{a}\,\boldsymbol{b}_{\|} = \boldsymbol{a}\,\boldsymbol{b}_{\|}$

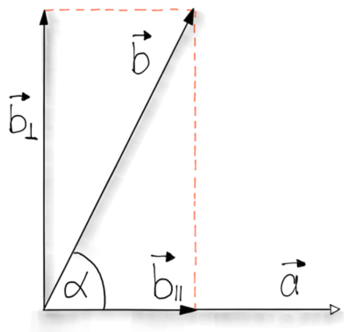

Abbildung 2: Zerlegung in parallelen und orthogonalen Anteil

Es kommt also für das SP bei $\boldsymbol{b}$ nur auf den Projektionsvektor $\boldsymbol{b}_{\|}$ an. Es folgt nun

$$\boldsymbol{a}\,\boldsymbol{b}_{\|} = \pm\,|\boldsymbol{a}|\,|\boldsymbol{b}_{\|}| = |\boldsymbol{a}|\,|\boldsymbol{b}|\cos(\alpha)$$

mit Hilfe des Spezialfalls für parallele Vektoren und der Projektions-Vorstellung vom Kosinus. Hieraus geht hervor, dass sich das SP als ein Maß für die Länge des Projektionsvektors auffassen lässt (indem man etwa den Vektor $\boldsymbol{a}$ normiert). Aus diesen Überlegungen lassen sich vier Grundvorstellungen zum SP identifizieren:

- **Produkt-Vorstellung**: Das SP als verallgemeinertes Produkt, dass gewisse Rechenregeln erfüllt (z.B. Distributivgesetz mit der Addition)
- **Orthogonalitäts-Vorstellung**: Das SP als Indikator für Orthogonalität
- **Winkel-Vorstellung**: Das SP als Maß für den eingeschlossenen Winkel
- **Projektions-Vorstellung**: Das SP als Maß für die Länge des Projektionsvektors

Für viele rechnerische Anforderungen in der analytischen Geometrie mögen zwar die Orthogonalitäts- und die Winkel-Vorstellung ausreichen. Um aber die Idee der Hesse'schen Normalenform von Ebenen zu erfassen und damit auch Abstandsaufgaben verständnisorientiert bearbeiten zu können, ist die Projektions-Vorstellung unverzichtbar.

Die Präsentation zu dem Vortrag mit einigen weiteren Details ist unter folgendem Link abrufbar: https://uni-bielefeld.sciebo.de/s/yPaHWJx0Dg9TlbW

Literatur

Borneleit, P.; Danckwerts, R.; Henn, H.-W.; Weigand, H.-G. (2001). Expertise zum Mathematikunterricht in der gymnasialen Oberstufe. Journal für Mathematik-Didaktik 22, H. 1, S. 73–90.

Henn, H.-W.; Filler, A. (2015). Didaktik der Analytischen Geometrie und Linearen Algebra: Algebraisch verstehen – Geometrisch veranschaulichen und anwenden. Springer Spektrum, Wiesbaden.

Salle, A.; Frohn, D. (2017). Grundvorstellungen zu Sinus und Kosinus. mathematik lehren 204, S. 8-12

Tietze, U.-P.; Klika, M.; Wolpers, H. (2000): Mathematikunterricht in der Sekundarstufe II. Bd. 2: Didaktik der Analytischen Geometrie und Linearen Algebra. Vieweg, Braunschweig.

vom Hofe, R. (1995): Grundvorstellungen mathematischer Inhalte. Spektrum, Heidelberg.