

Stellenwertverständnis: Materialdeutung, Zahlendreher und inverses Schreiben

In der mathematikdidaktischen Literatur herrscht Konsens darüber, dass ein tragfähiges Stellenwertverständnis wichtig ist für die Entwicklung arithmetischer Kompetenzen. Jedoch gilt Stellenwertverständnis im deutschsprachigen Raum als bisher wenig untersucht, besonders der Bereich um Vorkenntnisse sowie die Entstehung und Entwicklung. Im Beitrag werden die Ergebnisse zweier Studien zusammengefasst, die ihren Schwerpunkt unter anderem auf die Besonderheiten der Zahlwortbildung im Deutschen legen, und auf deren Einfluss auf das Stellenwertverständnis von Schülerinnen und Schülern (vgl. Fromme 2017, Schulz 2016).

1. Theoretische Begriffsklärung und Einfluss der Zahlwortbildung

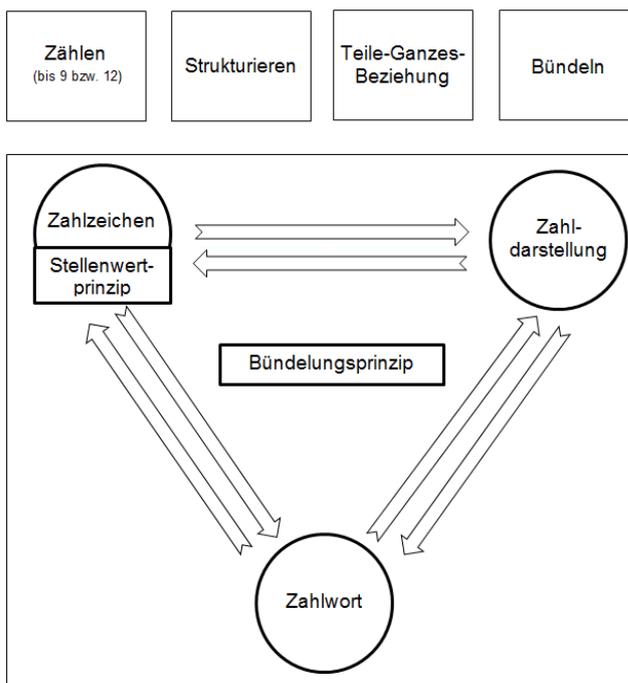


Abbildung 1

Zur theoretischen Begriffsklärung wurden unterschiedliche Studien zu Zahl- und Stellenwertverständnis zielgerichtet analysiert und kategorisiert, so dass eine theoriegeleitete Begriffsklärung erfolgen kann (Fromme 2017). Aus der Essenz der Analyse wurde ein Modell zur theoretischen Beschreibung von Stellenwertverständnis entwickelt (siehe Abb. 1). In diesem Modell sind zum einen notwendige Vorkenntnisse integriert (Abb. 1, oben), die sich inhaltlich in weiten Teilen überschneiden. Zum anderen fokussiert das Modell

auf die Übersetzungen zwischen Darstellungsebenen und somit auf die flexible Einsicht in den Zusammenhang zwischen Zahlwort, Zahlzeichen und (vorgestellter) Menge vor dem Hintergrund des Bündelungsprinzips (ausführlich vgl. Fromme 2017). Ein tragfähiges Stellenwertverständnis wird dann angenommen, wenn ein Inhalte übergreifendes, effektives *Nutzen* von dezimalen Strukturen beobachtet werden kann. Dies bezieht sich sowohl auf Übersetzungen zwischen Zahlrepräsentationen, als auch auf die gegenseitigen Entsprechungen der einzelnen Repräsentationen.

Neben diesem allgemeinen Modell ist für weitere Überlegungen zur Beschreibung und Analyse des Stellenwertverständnisses im deutschen Sprachraum eine Betrachtung der Besonderheiten der Zahlwortbildung notwendig. Es wird angenommen und ist in Ansätzen schon empirisch belegt, dass die Zahlwortbildung (nicht nur im Deutschen) die systematische Einsicht in die dezimalen Strukturen des Zahlensystems verschleiern kann (vgl. Schulz 2014, 168 ff.). Die zugrundeliegenden Unregelmäßigkeiten können als „potenzielle Verstehenshürde“ (Meyer 2012) bezeichnet werden. Für den deutschen Sprachraum besonders relevant und einflussreich scheint die *inverse Zahlwortbildung*: Bei dieser Sprechweise wird die Anzahl der Einer vor den Zehnern genannt und läuft somit der Schreib- und Leserichtung im Deutschen entgegen. Der Einfluss der inversen Zahlwortbildung auf die Wahrnehmung und Verarbeitung von Zahlen konnte bereits nachgewiesen werden (vgl. zusammenfassend Schulz 2014, 173 ff.).

2. Operationalisierung und empirische Begriffsklärung

Auf Grundlage des oben dargestellten Modells des Stellenwertverständnisses wurden in den hier beschriebenen Studien unter anderem alle sechs Übersetzungen zwischen den Darstellungsebenen untersucht (die Pfeile in Abb. 1). Der hier dokumentierte Teil der halbstandardisierten Interviews umfasst (1) ein Zahlendiktat zur Übersetzung Zahlwort → Zahlzeichen (sowohl schriftlich als auch als Taschenrechnerdiktat); (2) Aufgaben zur Übersetzung Mengendarstellung → Zahlzeichen (Mengen dargestellt mit Zehnerstangen und Einerwürfel des Dienes-Materials, die nicht in der konventionellen Anordnung „Zehner links, Einer rechts“ liegen, sollen als Zahlzeichen notiert werden); (3) zwei Aufgaben zur Übersetzung Zahlzeichen → Mengendarstellung (Zehnerstangen und Einerwürfel des Dienes-Materials sowie Beutel mit jeweils zehn Murmeln und einzelne Murmeln).

Darüber hinaus wurde die Bearbeitung von Aufgabenstellungen innerhalb jeweils einer Darstellungsebene untersucht, bei denen nicht die Übersetzung fokussiert wird, und Aufgaben bei denen vorrangig die Vorkenntnisse analysiert werden konnten (zur Beschreibung dieser Befunde siehe Fromme 2017). Durch die vorliegenden Befunde kann das theoretische Modell empirisch gefüllt werden.

3. Ausgewählte Ergebnisse

Zur Übersetzung zwischen Zahlwort und Zahlzeichen

Insgesamt schreiben zwei Drittel der interviewten Kinder (n=114) wenigstens eine diktierte Zahl invers (die Anzahl der Einer wird rechts notiert, dann links daneben die Anzahl der Zehner – also entgegen der üblichen

Schreibrichtung); ein Drittel aller Kinder schreibt mindestens die Hälfte der diktierten Zahlen invers. Bezogen auf den Leistungsstand der Kinder schreiben sowohl leistungsschwache (95 %), durchschnittliche (71 %) als auch leistungsstarke (47 %) Schülerinnen und Schüler beim Zahlendiktat invers. Das inverse Schreiben nimmt dabei mit zunehmender Leistung ab, ist aber kein Alleinstellungsmerkmal schwacher Schülerinnen und Schüler. Es kann kein Zusammenhang hergestellt werden zwischen der Häufigkeit invers geschriebener Zahlen und dem Auftreten von Zahlendrehern – Kindern, die besonders viele Zahlen invers schreiben, unterlaufen nicht häufiger Zahlendreher als anderen. Allerdings scheint das inverse Schreiben die Gefahr zu bergen, dass am Taschenrechner vermehrt Zahlendreher getippt werden (und unbemerkt bleiben).

Zur Übersetzung zwischen Material und Zahlzeichen

Beim Notieren von Zahlen, die nicht vorgelesen werden, sondern am Dienes-Material dargestellt sind, schreiben in allen Leistungsstufen ungefähr ein Drittel weniger Kinder invers als beim Zahlendiktat; auch die Anzahl der Kinder, denen Zahlendreher unterlaufen, nimmt im Vergleich zum Zahlendiktat ab (allerdings nicht bei den leistungsschwachen Kindern). Dabei spielt die Anordnung des Materials keine Rolle – selbst wenn die Zehner und Einer durcheinanderliegen, oder sogar die Zehnerstangen links der Einerwürfel. Dieser Befund kann darauf hindeuten, dass die Vorlage des Materials dafür sorgen kann, dass das inverse Schreiben und das Auftreten von Zahlendrehern abnehmen. Mit diesem Befund wird allerdings auch deutlich, dass die inverse Sprechweise auch bei sprachfreien Aufgabenstellungen immer noch einen Einfluss hat – ansonsten würde das inverse Schreiben bei dieser Aufgabenstellung kaum noch zu beobachten sein. Es scheint also auch bei sprachfreien Aufgaben eine indirekte Übersetzung über das inverse Zahlwort aktiviert zu werden (vgl. auch Pixner et al. 2011).

Zur Übersetzung zwischen Zahlzeichen und Material

Auf eine Frage, nach der ein Zahlzeichen (52) an Mehrsystemmaterial dargestellt werden soll, nehmen fast alle Kinder direkt Zehnerstangen zur Darstellung der linken Ziffer des Zahlzeichens (89 von 93 Kindern). Wenn jedoch das Zahlzeichen (47) in einer Quasi-Sachsituation (47 Murmeln in einem halbtransparentem Beutel) erscheint und die Kinder die Anzahl von möglichen Zehner-Bündeln nennen sollen, nutzen nur ein Drittel der Kinder die Information aus der linken Ziffer (31 von 93 Kindern). Die anderen Kinder verwenden vorrangig das Zahlwort und gaben *vierzig* als Anzahl für Zehnerbündel an, oder nutzen Zählprozesse.

Dieser Befund weist darauf hin, dass die Wahl des Materials einen Einfluss auf die Lösungsfindung der jeweiligen Aufgaben haben kann. Es scheint als Erinnerung für Strukturen im Zahlzeichen wichtig zu sein. Lediglich die cardinale Darstellung als unstrukturierter Murnelsack birgt wenig Handlungsaufforderung. Das Mehrsystemmaterial war aus dem Unterricht nicht bekannt. Kein Kind hat handelnd damit gearbeitet. Möglicherweise war ihnen nur die Punkt-Strich-Darstellung bekannt (Fromme 2017).

4. Schlüsse

Die Ergebnisse der materialgebundenen Aufgaben deutet darauf hin, dass Material Kindern bei der Identifikation von Zehnern und Einern in Verbindung mit dem Zahlzeichen zu helfen scheint, jedoch mit zwei Einschränkungen: Erstens hilft das Vorhandensein des Materials nicht allen Kindern gleichermaßen, zweitens scheint die Struktur des Materials und vor allem seine Bekanntheit von großer Relevanz zu sein. Hier stellt sich nicht nur forschungspraktisch die Frage, ob möglicherweise nicht (nur) Erkenntnisse über das Stellenwertverständnis von Schülerinnen und Schülern gewonnen werden, sondern auch über Deutungsweisen von (bekanntem) Material.

Um zu verhindern, dass die Zahlwortbildung im Deutschen einen negativen Einfluss auf das Verstehen von Zahlen haben kann, empfiehlt sich die explizite Thematisierung und Bewusstmachung der Unregelmäßigkeiten der Zahlwortbildung (Schulz 2014, 191 f.; Gaidoschik 2003).

Literatur

- Fromme, M. (2017). *Stellenwertverständnis im Zahlenraum bis 100: Theoretische und empirische Analysen*. Wiesbaden: Springer Spektrum.
- Gaidoschik, M. (2003). Zehner und Einer: Die ersten Schritte. Anregungen für die Erarbeitung von Stellenwertverständnis im Zahlenraum bis 99. In F. Lenart, N. Holzer & H. Schaupp (Hrsg.), *Rechenschwäche, Rechenstörung, Dyskalkulie* (S. 182-189). Graz: Leykam.
- Meyer, M. (2012). Zahlen durch Sprache verstehen. *Praxis der Mathematik in der Schule*, 54(45), 44–45.
- Pixner, S., Möller, K., Hermanova, V., Nürk, H.-Ch. & Kaufmann, L. (2011). Whorf reloaded: Language effects on non-verbal number processing in 1st grade – a trilingual study. *Journal of Experimental Child Psychology*, 108(2), 371-382.
- Schulz, A. (2014). *Fachdidaktisches Wissen von Grundschullehrkräften – Diagnose und Förderung bei besonderen Problemen beim Rechnenlernen*. Bielefelder Schriften zur Didaktik der Mathematik. Wiesbaden: Springer Spektrum.
- Schulz, A. (2016). Inverses Schreiben und Zahlendreher – Eine empirische Studie zur inversen Schreibweise zweistelliger Zahlen. *Beiträge zum Mathematikunterricht*, 883-886.