Florian FÜLLGRABE & Andreas EICHLER, Kassel

Beweisakzeptanz bei Studierenden des Lehramts

1. Einleitung

Beweisakzeptanz bezieht sich auf die Frage, wann „etwas“ aus Sicht einer Person ein mathematischer Beweis ist. Sie scheint dabei ein sozialer Akt oder auch das Resultat einer (individuellen) psychologischen Überzeugtheit zu sein (Reid & Vallejo-Vargas, 2017), wobei eine relative Überzeugtheit nicht mit einer absoluten Gültigkeit eines Beweises einhergehen muss (Weber & Mejia-Ramos, 2015). Die zuletzt genannte absolute Gültigkeit ist zudem eine schwer zu fassende Eigenschaft eines Beweises. So scheint es keine allgemein akzeptierten Kriterien für die Validität von Beweisen zu geben (Hanna & Jahnke, 1996).

Um Beweisakzeptanz präziser beschreiben zu können, untersuchen wir in einem Forschungsprojekt daher die individuellen Argumentationen zur Beweisakzeptanz von Lernenden unter Berücksichtigung ihrer eigenen Beweiskonstruktionen. In diesem Beitrag sollen exemplarisch Argumente von Studierenden des Lehramts hinsichtlich ihrer Beweisakzeptanz unter Berücksichtigung ihrer eigenen Beweiskonstruktionen betrachtet werden.

2. Methode

Momentan basiert das Forschungsprojekt auf einer Stichprobe von n=506 Studierenden unterschiedlicher Lehramtsstudiengänge. Alle Studierenden hatten zunächst die Aufgabe, einen Beweis zu einer mathematischen Aussage zu konstruieren. Anschließend bekamen sie einen, direkten und formal-symbolisch verfassten, Beweis zur selben Aussage wie oben vorgelegt und wurden aufgefordert, zu diesem Beweis einen Fragebogen zur Beweisakzeptanz auszufüllen. Der vorgelegte Beweis wurde in zwei Bedingungen verwendet, nämlich entweder in einer kurzen oder langen Formulierung, d.h. es gab eine Unterscheidung hinsichtlich der Ausführlichkeit (Anzahl der Beweisschritte, mitunter auch eine kleinschrittigere Argumentation). Die Bedingungen wurden den Teilnehmern der Studie zufällig zugeordnet. Ein Beispiel eines kurzen Beweises zur Aussage „Wenn $c|a$ und $c|b$, dann $c|(a+b)$ für alle $a,b,c \in \mathbb{N}$“ ist im Folgenden dargestellt.

Wenn $c|a$ und $c|b$, dann gilt $a+b = c \cdot p + c \cdot q$ mit $p,q \in \mathbb{N}$

Da $p+q \in \mathbb{N}$ ist, folgt $c \mid (a+b)$

Unserer Vorgehensweise liegen zwei Hypothesen zugrunde: erstens, dass Lernende mit unterschiedlichen Fähigkeiten, Beweise zu konstruieren, vorgelegte Beweise auch unterschiedlich hinsichtlich der Beweisakzeptanz beurteilen. Zweitens, dass zusätzliche formal-symbolische Beweisschritte den Beweis überzeugender gestalten und so die Beweisakzeptanz erhöhen.

3. Exemplarische Analyse von Beweiskonstruktionen

Zur Beurteilung der Beweiskonstruktionen wird derzeit unter Berücksichtigung von Tebaartz & Lengnink (2015) ein Kategoriensystem entwickelt, das nach aktuellem Stand eine Einteilung der Beweiskonstruktionen in „gut“ (Es handelt sich um einen gültigen Beweis mit allenfalls marginalen Fehlern), „mittel“ (Es handelt sich aufgrund kleiner Fehler oder kleiner, fehlender Aspekte um keinen gültiger Beweis) und „schlecht“ (Es handelt sich aufgrund massiver Fehler oder Unvollständigkeit um keinen gültigen Beweis) vorsieht. Obgleich der Begriff der Gültigkeit schwer zu fassen ist, definieren wir ihn im Kontext dieser Analyse dahingehend, dass die Behauptung aus den Voraussetzungen normativ vollständig aus einer zusammenhängenden Kette jeweils korrekter, deduktiver Schlüsse gefolgert wird. Dabei orientieren wir uns an den Begriffen Beweisschema, Beweisstruktur und Beweiskette von Reiss & Heinze (2003). Die oben in einer ersten Version umschriebene Einteilung in „gut“ und „schlecht“ soll im Folgenden exemplarisch anhand von Studierendenlösungen dargestellt werden.

$a, b, c \in \mathbb{N}$

Beh.: Wenn $c|a$ und $c|b$, dann $c|(a+b)$.

Bew.: $c|a \Leftrightarrow c \cdot n = a$, $c|b \Leftrightarrow c \cdot m = b$, $n, m \in \mathbb{N}$.

$a+b = c \cdot n + c \cdot m = c \cdot (n+m)$. Da $(n+m) \in \mathbb{N}$, gilt, dass $c|(a+b)$. $\square$

Abb. 1: Beweiskonstruktion A, Studierender des LA an Gymnasien, 7. Sem.

In dieser Beweiskonstruktion A wird mit den Voraussetzungen begonnen und mit der Behauptung abgeschlossen. Ferner kann jede neu gezeigte Aussage als aus der vorherigen Aussage oder unter Verwendung weiterer wahrer Aussagen (z.B. Abgeschlossenheit von ℕ) gefolgert eingeschätzt werden. Insgesamt wird die Argumentation als normativ vollständige Verkettung korrekter deduktiver Schlüsse eingeschätzt. Folglich kann die Beweiskonstruktion als gültiger Beweis eingeschätzt werden.

Beh.: Es gilt für alle $a, b, c \in \mathbb{N}$ $c|a \wedge c|b \Rightarrow c|(a+b)$

Beweis: $\exists\, n, m \in \mathbb{N} : c|(a+n) \Leftrightarrow c|(b+m)$

$\Rightarrow a = m \wedge b = n$

$\Rightarrow c|(a+b) \Leftrightarrow c|(b+a)$

$\Rightarrow c|a \wedge c|b \Rightarrow c|(a+b)$ $\square$

Abb. 2: Beweiskonstruktion B, Stud. des LA an Haupt- und Realschulen, 1. Sem.

Diese Beweiskonstruktion B ist aus folgenden Gründen als „schlecht“ zu bewerten: Zeile 1 bis 3 der Beweiskonstruktion sind irrelevant für den Beweis der zu beweisenden Aussage. Ferner wird in Zeile 4 aus der Zielaussage $c|(a+b)$ gefolgert, dass $c|a$ und $c|b$ gilt, was aber nicht für alle $a,b,c \in \mathbb{N}$ gilt (Beispiel: $3|(2+7)$, aber nicht $3|2$ und $3|7$). Daraus wird wiederum die Zielaussage $c|(a+b)$ ohne weitere Argumente gefolgert. In der Folge ist diese Beweiskonstruktion nach unserer Einschätzung unvollständig und besteht aus mehreren irrelevanten Argumenten sowie falschen Schlüssen. Daher handelt es sich bei ihr um keinen gültigen Beweis.

4. Exemplarische Betrachtungen zur Beweisakzeptanz

Betrachtet wird nun, wie zur Frage, ob es sich bei der vorgelegten Begründung um einen mathematischen Beweis handle, argumentiert wurde. Der Studierende mit „schlechter“ Beweiskonstruktion B führt dabei folgendes Argument, warum der vorgelegte kurze Beweis kein Beweis sei, an:

B1: „Weil die Formalia, also die Behauptung nicht komplett eingehalten wurde.“

Das Argument wird unter der Frage, was man noch hinzufügen müsse, damit die Begründung zu einem mathematischen Beweis werde, konkretisiert:

B2: „Die Behauptung muss noch einmal formuliert werden und das Beweisen Zeichen am Ende muss hinzugefügt werden“

Eine Begründung wird also zu einem Beweis, wenn diese einen gewissen Aufbau aufweist. Der Studierende mit „guter“ Beweiskonstruktion argumentiert hingegen so, dass der vorgelegte kurze Beweis ein Beweis sei:

A: „Wegen des generellen Aufbaus: Erst Voraussetzungen, danach Folgerungen, schließlich die Schlussfolgerung zur Behauptung.“

Zwar bezieht sich das Pro-Argument des Studierenden mit „guter“ Beweiskonstruktion A auch auf den Aufbau des Beweises, allerdings argumentiert er, dass eine in sich geschlossene, logische Argumentation, gegeben ist.

5. Diskussion und Ausblick

Während der Studierende mit „guter“ Beweiskonstruktion die vorhandene (und aus seiner Sicht gegebene) globale, logische Struktur als notwendig erachtet und die Begründung als Beweis akzeptiert, lehnt der Studierende mit „schlechter“ Beweiskonstruktion sie wegen fehlender „oberflächlicher“ Komponenten, die aus unserer Sicht für den Beweis der Aussage irrelevant sind, ab. Mit Blick auf die Argumentation des Studierenden mit „guter“ Beweiskonstruktion stellen wir die Hypothese auf, dass Studierende mit „guten“ Beweiskonstruktionen häufiger „härtere“, strukturelle Argumente nennen, z.B. fokussiert auf die globale, logische Struktur von Beweisen.

Allein exemplarisch, bezogen auf ein Argument zeigen wir einen Beleg für diese Hypothese anhand der statistischen Analyse kumulierter Daten von 355 Studierenden unterschiedlicher Lehrämter, Semester und Veranstaltungen. So ist ein Argument für die Akzeptanz der vorgelegten Begründung als mathematischer Beweis die Verwendung von Voraussetzungen, um die Aussage zu beweisen. Dieses „harte" Argument wird signifikant häufiger von Studierenden mit „guter" Beweiskonstruktion sowohl beim kurzen als auch beim langen Beweis genannt (die Angaben in den Zellen sind die Mittelwerte der Verwendung des Arguments in der Gruppe der Studierenden mit „guter" und „schlechter" Beweiskonstruktion).

	M1(gut)	M2 (schlecht)	t	df	p
Kurzer Beweis	0,31	0,08	2,572	86	,012*
Langer Beweis	0,60	0,13	5,586	111	<,001***

Eine umfangreiche statistische Analyse der Argumentationen unter weiter ausdifferenzierter Berücksichtigung eigener Beweiskonstruktionen und eine genauere Betrachtung einzelner Populationen sowie eine Ausweitung auf andere Fachgebiete der Mathematik werden in zukünftigen Beiträgen folgen.

Literatur

Hanna, G., & Jahnke, H. N. (1996). Proof and Proving. In A. J. Bishop (Hg.), Kluwer international handbooks of education (Bd. 4, S. 877–908). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Reid, D. A., & Vallejo-Vargas, E. (2017). When is a generic argument a proof? In G. Kaiser (Hg.), *Proceedings of the 13th International Congress on Mathematical Education.* Cham: Springer International Publishing.

Reiss, K., & Heinze, A. (2003). Reasoning and Proof: Methodological Knowledge as a Component of Proof Competence. In M. A. Mariotti (Hg.), *International Newsletter of Proof.*

Weber, K., & Mejia-Ramos, J. P. (2015). On relative and absolute conviction in mathematics. *For the Learning of Mathematics 2015*, S. 15–21.

Tebaartz, P. C., & Lengnink, K. (2015). Was heißt "mathematischer Beweis"? Realisierungen in Schülerdokumenten. In A. Budke, M. Kuckuck, M. Meyer, F. Schäbitz, K. Schlüter, & G. Weiss (Hg.), LehrerInnenbildung gestalten: Band 7. Fachlich argumentieren lernen: Didaktische Forschungen zur Argumentation in den Unterrichtsfächern (1. Ausgabe, S. 105–120). Münster, New York: Waxmann.