

Michael GAIDOSCHIK, Bozen

## **„Orientierung im Zahlenraum“ anstelle von, vor oder auf Grundlage von Stellenwertverständnis?**

Neben der Mathematikdidaktik und von dieser kaum zur Kenntnis genommen, beschäftigt sich auch die Neuropsychologie mit mathematischem Lernen. Das geschieht längst auch in praktischer Hinsicht, etwa in Form käuflicher Lernprogramme, die mit Versprechungen wie „Ab jetzt macht Mathe Spaß!“ und „Nie mehr Rechenschwierigkeiten!“ für sich werben und in Anspruch nehmen, auf Basis „aktuellster Lernforschung“ „wissenschaftlich entwickelt“ worden zu sein (vgl. [www.meistercody.com/de/talasia](http://www.meistercody.com/de/talasia); [www.dybuster.com/calcularis](http://www.dybuster.com/calcularis)).

Ein zentrales Element dieser Programme sind Übungen zum Einordnen von Zahlen auf dem Zahlenstrahl. Im folgenden Beitrag werden diese Übungen und das zugrundeliegende Theoriegebäude einer kritischen Würdigung unterzogen. Zum einen deshalb, weil ich es für eine Aufgabe unserer Disziplin halte, hierzu öffentlich Stellung zu beziehen; zum anderen, weil zum Zahlenstrahl und damit zusammenhängend zur Metapher „Zahlenraum“ meines Erachtens auch innerhalb unserer Community Diskussionsbedarf besteht.

### **1. Der „innere“ Zahlenstrahl der Neuropsychologie**

Kucian et al. (2011) ließen 32 Kinder von 8 bis 10 Jahren, 16 davon „dyskalkulisch“, 5 Wochen lang an je 5 Tagen jeweils 15 Minuten lang ein Training der folgenden Art durchführen: Am Computerbildschirm erscheint die Zeichnung eines Raumschiffs, das vom oberen an den unteren Bildschirmrand schwebt. Dort befindet sich eine Strecke, deren Enden mit 0 und 100 markiert sind, dazu noch in der Mitte mit 50. Das Raumschiff selbst trägt eine zweistellige Zahl in Ziffernschreibweise. Die Kinder sollen nun mit der Links- und Rechtstaste das Raumschiff so manövrieren, dass es an möglichst passender Stelle landet; dabei wird äquidistante Darstellung der Zahlen an der Zahlenstrecke vorausgesetzt. Erfolgt die Landung innerhalb einer Fehlertoleranz von 10 Prozent, so wird sie als gelungen gewertet. Sodann wird das Raumschiff, wenn nötig, noch auf die exakt ausgemessene Position verschoben, und das nächste Raumschiff schwebt herab. Bei Landungsversuchen außerhalb des 10-Prozent-Zone wird dasselbe Raumschiff ein weiteres Mal und solange herabgelassen, bis das Kind ausreichend genau trifft. In einer Variante dieser Aufgabe trägt das Raumschiff Rechnungen der Art  $ZE + E$ ,  $ZE - E$ . Als Landeziel gilt die Summe bzw. Differenz der Zahlen.

Kucian et al. (2011) berichten von signifikanten Verbesserungen der Lokalisierung *wie auch* von einer signifikanten Erhöhung der Anzahl korrekt gelöster Additionen und Subtraktionen im Vergleich Pre- und Posttest, und zwar sowohl für die „dyskalkulischen“ Kinder wie jene der Kontrollgruppe.

Soweit zu einer von zahlreichen Studien, die sich darum bemühen, statistische Zusammenhänge zwischen der Genauigkeit von Kindern und Erwachsenen beim Lokalisieren von Zahlen auf Zahlenstrahlen/-strecken auf der einen und arithmetischen, teils auch weiter gefasst mathematischen Kompetenzen auf der anderen Seite zu prüfen. Moeller et al. (2015, S. 598) halten als ihr Fazit einer Zusammenschau einschlägiger Forschung fest: „The mental number line is a promising representation to be trained in numerical education and intervention.“ Die eingangs erwähnten Lernprogramme berufen sich insofern zurecht auf „aktuellste Lernforschung“.

Aus fachdidaktischer Sicht fällt auf, dass in all diesen Studien nicht die Rede davon ist, auf Basis welcher Überlegungen, welchen Wissens über das Dezimalsystem, welcher Rechenstrategien (dann, wenn Rechenterme herabschweben) die Kinder zu ihren Lösungen gelangen. All das ist nicht Teil des Trainings. Die Kinder erhalten keine Rückmeldung dazu, warum manche Versuche erfolgreich sind, andere nicht, und was helfen könnte, die Erfolgsquote zu erhöhen. Sie mögen sich selbst einen Reim darauf machen, dieser bleibt aber ihr Geheimnis. Insofern scheint fragwürdig, was genau Kinder in solchen Trainings lernen, und ob es dazu beiträgt, dass sie über diese spezielle Aufgabe hinaus besser mit zweistelligen Zahlen zurechtkommen.

Es wäre durchaus lohnend, dies zu untersuchen. Jedenfalls aber scheint mir hier ein typisches Beispiel dafür vorzuliegen, wie neuropsychologische Forschung auf mathematisches Denken und Lernen Bezug nimmt:

- Untersucht wird NICHT das mathematische Denken und Lernen selbst. Dieses bleibt eine inhaltlich nicht bestimmte „Black Box“.
- Untersucht werden vielmehr *quantifizierte Leistungen* in Testaufgaben, die mehr oder weniger mit Mathematik zu tun haben.
- Diese werden *statistisch verrechnet mit theoretischen Konstrukten*, die als *Voraussetzungen* für erfolgreiches Mathematiktreiben angenommen werden. Davon gibt es innerhalb der Disziplin eine reiche Auswahl: Intelligenz, Arbeitsgedächtnis, Verarbeitungsgeschwindigkeit, „spontane Fokussierung auf Numerosität“ ...

Das ist auf *theoretischer* Ebene mangelhaft. Denn natürlich hat jede kognitive Leistung zwar eine Vielzahl an Voraussetzungen. Die Aufgabe einer *Wissenschaft* kognitiver Leistungen besteht aber darin, zu erklären, was das Individuum, das solche Leistungen erbringt, aus all diesen Voraussetzungen

macht, eventuell auch, wie es das Fehlen oder Defizite im Bereich einzelner Voraussetzungen kompensiert (vgl. Gaidoschik 2016). Die Neuropsychologie leistet diese Aufgabe nicht. Das hindert sie nicht, Trainingsprogramme zu entwickeln, die mit wohlbegründeten Forderungen der Mathematikdidaktik (etwa: Primat von konzeptuellem über prozedurales Verständnis) unvereinbar sind. Mathematikdidaktik sollte dies meines Erachtens nicht unkommentiert lassen, die wissenschaftliche Auseinandersetzung darüber suchen.

## 2. Fachdidaktische Sichten auf den Zahlenstrahl

Freilich ist gerade der Zahlenstrahl ein Thema, über das auch innerhalb unserer Disziplin Uneinigkeit besteht. Lorenz (2005, S. 170) sieht sich durch die neuere neuropsychologische Forschung und das in der Neuropsychologie vielzitierte „Triple Code Model“ in seiner Auffassung bestätigt, dass „eine bedeutungshaltige Erfassung einer Zahl“ ohne „quasi räumliche Bestimmung“ an einer vorgestellten Zahlengeraden „nicht möglich“ sei. Das „Triple Code Modell“ postuliert bekanntlich drei „Module“ im Sinne von neuronalen Netzwerken, die jeweils als organische Basis für unterschiedliche Formen der „Zahlverarbeitung“ gedacht werden sollen. Dabei sei ein Modul für die Verarbeitung von gesprochenen *Zahlwörtern* zuständig, ein anderes für in *Ziffern* notierte Zahlen, ein drittes für die „Semantik“, also dafür, dass Zahlen für uns überhaupt *Bedeutung* gewinnen. Diese bestehe im Wesentlichen darin, dass wir den Zahlen Positionen auf einem „inneren“ Zahlenstrahl zuordnen (vgl. Lorenz, 2005).

Dem muss entgegengehalten werden, dass Zahlen zwar unter anderem *auch* auf einem Zahlenstrahl *dargestellt* und auf Basis solcher Darstellungen auch *vorgestellt* werden können. Darstellung und Dargestelltes sind aber logisch zu trennen. Die Bedeutung einer (natürlichen) Zahl ist ein Abstraktum. Letztlich sind Zahlen wohl nicht anders adäquat zu erfassen als durch den *Bezug auf andere Zahlen*. In der umständlichsten Variante ist dies der Bezug zur Eins: 48 z.B. ist nichts Anderes als  $1+1+1+\dots+1$ , die Summe von 48 Einsen. In der dezimalen Notation (die selbst eine besondere *Darstellung* der Zahl ist!) verbirgt sich eine Bündelung von je zehn Einsen zu einer Zehn. Wer diese Notation versteht, kann unschwer weitere Bezüge (48 ist aus 40 und 8 zusammengesetzt, ebenso aus  $30 + 18\dots$ ) herstellen (Gaidoschik, 2015).

Nichts davon ist *zwingend* mit Zahlenstrahlvorstellungen verbunden. Umgekehrt ist zumindest implizites Wissen über Stellenwerte (wie freilich auch Wissen um die Konventionen der Zahlenstrahldarstellung!) Voraussetzung dafür, um *tragfähige* Zahlenstrahlvorstellungen zu entwickeln, etwa auch, um Einordnungen zweistelliger Zahlen auf einer mit 0 und 100 begrenzten Zahlenstrecke zielgeleitet vornehmen zu können. Das zeigt auch die Analyse

von Schwierigkeiten, die Kinder bei solchen Aufgaben haben, wenn sie nicht über die genannten Voraussetzungen verfügen. Aufgefordert, die Markierung von z.B. 29 auf der Zahlenstrecke zwischen 0 und 100 vorzunehmen, wissen sich manche dann nicht anders zu helfen, als von 0 ausgehend „ein klein bisschen“ nach rechts zu gehen, dort eine Markierung für die gedachte 1 zu machen, um in dieser Weise dann in Einzelschritten bis zu 29 hochzählend weiterzugehen. Die Markierung für 29 landet auf diese Weise in der Regel nicht dort, wo sie gemäß den Konventionen unserer Zahlenstrahldarstellung hingehört. Häufig zu beobachten ist auch die Orientierung an einzelnen Ziffern, wenn etwa 199 zwischen 0 und 1000 nahe bei 1000 angenommen wird, „wegen der Neuner“, oder 3050 als Mitte zwischen 3000 und 4000 bestimmt wird („weil in der Mitte ist hinten immer 5“).

Aus fachdidaktischer Sicht lassen sich viele nützliche, lernförderliche Verwendungen des Zahlenstrahls und abgeleitet des Rechenstrichs als besonderen Formen der Zahldarstellung angeben, insbesondere auch im Bereich mehrstelliger, „großer“ Zahlen und von Dezimalbrüchen. Gerade deshalb erscheint mir wichtig, Lehrkräften in Aus- und Fortbildung klar zu vermitteln, dass und wie insbesondere Wissen über das Dezimalsystem Voraussetzung dafür ist, um mit dieser linearen Form der Zahldarstellung verständlich umzugehen. Wenig hilfreich erachte ich in dieser Hinsicht die im deutschen Sprachraum verbreitete Rede von „Orientierung im Zahlenraum“ als Ziel des Mathematikunterrichts: Die *Metapher* „Zahlenraum“ erfasst Wesentliches (die Prinzipien des Dezimalsystems) *nicht* und trägt nicht dazu bei, Klarheit zu vermitteln darüber, welche Lernschritte zunächst notwendig sind, damit weitere erfolgreich sein können (vgl. Gaidoschik, 2015).

## Literatur

- Dehaene, S. (1992). Varieties of numerical abilities. *Cognition*, 44(1-2), 1-42.
- Gaidoschik, M. (2015). Einige Fragen zur Didaktik des Hunderterraums. *Journal für Mathematik-Didaktik*, 35(1), 163-190.
- Gaidoschik, M. (2016). Prävention von „Rechenschwächen“: Was Fachdidaktik kann und könnte. *Beiträge zum Mathematikunterricht 2016* (S. 49-56).
- Kucian, K., Grond, U., Rotzer, S., Henzi, B., Schönmann, C., Plangger, F., Gälli, M., Martin, E., & von Aster, M. (2011). Mental number line training in children with developmental dyscalculia. *NeuroImage*, 57, 782-795.
- Lorenz, J. H. (2005). Grundlagen der Förderung und Therapie. In M. von Aster & J. H. Lorenz (Hrsg.), *Rechenstörungen bei Kindern. Neurowissenschaft, Psychologie, Pädagogik* (S. 165–177). Göttingen: Vandenhoeck & Ruprecht.
- Moeller, K., Fischer, U., Nuerk, H., & Cress, U. (2015). Computers in mathematics education. Training the mental number line. *Computers in Human Behavior* 48, 597-607.