Stephanie GLEICH, Nürnberg

Über einen neuen (?) Aufgabentyp zu Dreieckskonstruktionen

Im Rahmen einer geplanten Dissertation werden Problemstellungen zu (vermutlich) neuartigen Konstruktionsproblemen für Dreiecke analysiert, die durch Variation (vgl. Schupp, 2002) bekannter Aufgabenstellungen (vgl. Schupp, 2006, Weth, 2002) entstanden sind. Durch diese Idee können über 2000 Problemstellungen des gleichen Aufgabentyps generiert werden, deren Aufbau im ersten Teil dieses Beitrags dargestellt wird. Anschließend wird mit Hilfe kombinatorischer Überlegungen belegt, wie die Anzahl der beschriebenen Aufgaben ermittelt werden kann. Der abschließende Ausblick zeigt die ersten Schritte des geplanten konzeptionellen Vorgehens zur Bearbeitung dieser Konstruktionsprobleme.

Zum Aufbau der Konstruktionsprobleme

Die Problemstellungen des zu bearbeitenden Aufgabentyps basieren auf folgendem Prinzip:

Gegeben:	Drei Geraden und / oder Punkte.
Gesucht:	Ein Dreieck, bei dem diese Geraden und / oder Punkte bestimmte besondere Linien und / oder Punkte im Dreieck darstellen.

Abbildung 1 zeigt eine mögliche Problemstellung dieses Aufgabentyps, wo drei Geraden gegeben sind und ein Dreieck gesucht ist, bei dem diese Geraden zwei Mittelsenkrechten m_a und m_b und eine Winkelhalbierende w_c darstellen.

Durch Variation der Aufgabenstellungen können alle möglichen Kombinationen an drei besonderen Linien und / oder Punkten gefordert und so weitere Problemstellungen erzeugt werden. Statt mit zwei Mittelsenkrechten und einer Winkelhalbierenden als Vorgaben wie in der exemplarisch betrachteten Problemstellung kann in einer weiteren Aufgabenstellung also beispielsweise ein Dreieck gesucht sein, in dem die drei gegebenen Geraden zwei Mittelsenkrechten m_a und m_b und eine Höhe h_c repräsentieren.

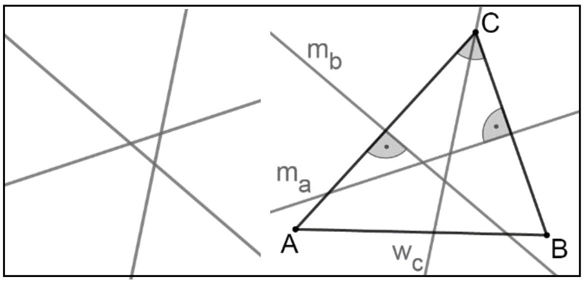

Abb. 1: links: gegebene Anfangskonfiguration (grau); rechts: gesuchtes Dreieck (schwarz)

Wiederum neue Problemstellungen ergeben sich, indem weitere besondere Linien und Punkte im Aufgabentyp berücksichtigt werden. Neben den gängigen vier besonderen Linien und vier Punkten – also Höhen, Mittelsenkrechte, Seitenhalbierenden, Winkelhalbierenden und deren Schnittpunkten – können auch „außercurriculare“ besondere Linien und Punkte, wie beispielsweise Gergonne-Geraden, Symmediane oder Fermatpunkte als je eine der drei geforderten Konstruktionsbedingungen in den Problemstellungen festgelegt werden (vgl. Auflistung besonderer Linien und Punkte im Dreieck z.B. von Castellsaguer, 2014). Je nach dem, wie hoch die Anzahl g der insgesamt im Aufgabentyp berücksichtigten besonderen Linien und die Anzahl p der im Aufgabentyp zugelassenen besonderen Punkte ist, entsteht eine Vielzahl an möglichen Problemstellungen, deren Anzahl im folgenden Abschnitt rechnerisch ermittelt wird.

Zur Ermittlung der Anzahl an Problemstellungen

Im Aufgabentyp können vier Anfangskonfigurationen unterschieden werden. Neben drei gegebenen Geraden können auch ein Punkt und zwei Geraden, zwei Punkte und eine Gerade oder drei Punkte gegeben sein (siehe Abbildung 2 a-d). Zu jeder Anfangskonfiguration kann nun die Anzahl der Problemstellungen in Abhängigkeit von g und p – also den Anzahlen der zugelassenen besonderen Linien und Punkte – hergeleitet werden.

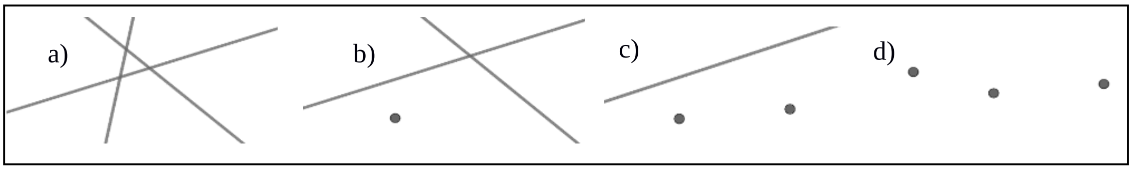

Abb. 2: mögliche Anfangskonfigurationen bei drei gegebenen Geraden und/oder Punkten

Zunächst wird die Anzahl für „drei gegebene Geraden“ (s. Abb. 2a) hergeleitet. Unter Berücksichtigung der Lage der besonderen Linien im gesuchten Dreieck können hierbei drei Positionen unterschieden werden. Wie Abb. 3 zeigt, können sich alle drei besonderen Linien auf eine Dreiecksseite (i) oder zwei der drei besonderen Linien auf eine und die dritte auf eine andere Dreiecksseite (ii) oder alle drei auf unterschiedliche Dreiecksseiten beziehen (iii). Zur Ermittlung der Anzahl der Problemstellungen muss jeweils nicht weiter unterschieden werden, auf welche Dreiecksseite a, b oder c sich die besonderen Linien genau beziehen, da sich aus Symmetriegründen analoge Problemstellungen ergeben.

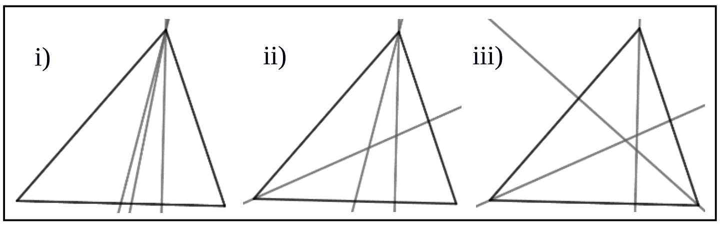

Abb. 3: Lageeigenschaften besonderer Linien im Dreieck

In ersterem Fall (siehe Abbildung 3i) müssen die drei gegeben Geraden zwangläufig drei unterschiedliche Arten an besonderen Linien im Dreieck darstellen. Dabei spielt weder die Reihenfolge der drei gewählten besonderen Linien eine Rolle, noch die Dreiecksseite a, b oder c, auf die sie sich gemeinsam beziehen. Mit g im Aufgabentyp zugelassenen besonderen Linien können damit also $\binom{g}{3}$ Problemstellungen erzeugt werden.

Mit analogen Überlegungen für den zweiten Fall (siehe Abbildung 3ii) ergeben sich aus den beiden sich auf die gleiche Dreiecksseite beziehenden besonderen Linien $\binom{g}{2}$ Kombinationen. Da sich die dritte besondere Linie in diesem Fall auf eine andere Dreiecksseite bezieht, ist sie beliebig wählbar. Es resultieren damit $\binom{g}{2}\cdot g$ mögliche Problemstellungen.

Im dritten Fall beziehen sich alle drei besonderen Linien auf unterschiedliche Dreiecksseiten (siehe Abbildung 3iii). Daher können diese zum einen drei unterschiedliche Arten an besonderen Linien im Dreieck darstellen, was analog zu vorherigen Überlegungen bereits $\binom{g}{3}$ Problemstellungen ergibt. Hinzukommen diejenigen g Problemstellungen, deren drei gegebene Geraden besondere Linien gleicher Art im gesuchten Dreieck sind. Außerdem werden Kombinationen mit zwei besonderen Linien gleicher Art und einer davon verschiedenen hinzugezählt, was weitere $g\cdot(g-1)$ Problemstellungen ergibt.

Die Anzahl der Konstruktionsprobleme zur Anfangskonfiguration „drei gegebene Geraden“ (siehe Abbildung 2a) kann somit mit folgender Formel in Abhängigkeit von g ermittelt werden:

$$\boxed{\binom{g}{3} + \binom{g}{2}\cdot g + \binom{g}{3} + g + g\cdot(g - 1) = \ldots = \frac{g\cdot(g-1)\cdot(g-2)}{6} + \frac{g^2\cdot(g-1)}{2} + \frac{g^3+3g^2+2g}{6}}$$

Um die Gesamtanzahl aller Problemstellungen im Aufgabentyp berechnen zu können, werden nun die in der Formel noch fehlenden Anfangskonfigurationen mit gegebenen Punkten systematisch und in Abhängigkeit von g und p abgezählt.

Für „einen gegebenen Punkt und zwei Geraden“ (siehe Abbildung 2b) können $\binom{g}{2}\cdot p$ Problemstellungen erzeugt werden, wenn sich die beiden besonderen Linien auf die gleiche Dreiecksseite beziehen und sich damit in ihrer Art unterscheiden. Beziehen sich die beiden besonderen Linien auf verschiedene Dreiecksseiten, so können sie von unterschiedlicher, aber auch von gleicher Art sein, und damit können weitere $\binom{g}{2}\cdot p + g\cdot p$ Problemstellungen generiert werden. Für die Angangskonfiguration „eine gegebene Gerade und zwei

Punkte“ (siehe Abbildung 2c) ergeben sich $\binom{g}{2} \cdot g$ Problemstellungen, und für den letzten Fall „drei gegebene Punkte“ (siehe Abbildung 2d) kommen $\binom{p}{3}$ weitere Problemstellungen hinzu. Die Gesamtanzahl an Konstruktionsproblemen lässt sich somit mit folgender Formel für g im Aufgabentyp zugelassene besondere Geraden und p im Aufgabentyp zugelassene Punkte berechnen:

$$\frac{g\cdot(g-1)\cdot(g-2)}{6} + \frac{g^2\cdot(g-1)}{2} + \frac{g^3+3g^2+2g}{6} + g\cdot p + \binom{g}{2}\cdot p + \binom{p}{2}\cdot g + \binom{p}{3} = \ldots =$$
$$= \frac{g\cdot(g-1)\cdot(g-2)}{6} + \frac{g^2\cdot(g-1)}{2} + \frac{g^3+3g^2+2g}{6} + \frac{p\cdot g\cdot(2g+p-1)}{2} + \frac{p\cdot(p-1)\cdot(p-2)}{6}$$

Werden nun beispielsweise nur die gängigen merkwürdigen Linien und Punkte eines Dreiecks im Aufgabetyp in Betracht gezogen, so ergeben sich mit g = 4 und p = 4 insgesamt 140 Problemstellungen. Nimmt man jeweils sechs außercurriculare Punkte und Linien hinzu und setzt entsprechend g = 10 und p = 10, so erhält man schon 2360 Problemstellungen.

Ausblick

Die hohe Anzahl der Problemstellungen lässt bereits vermuten, dass die Bearbeitung in Kooperation mit Studenten und Schüler durchgeführt wird, die die Aufgaben in Seminaren, AGs oder Zulassungsarbeiten bearbeiten.

Geplant ist zunächst ein Seminar, welches dazu dient, ein einheitliches Bearbeitungsschema und eine standardisierte Lösungsstruktur zu erstelleen. Daneben sollen auftretende Schwierigkeiten analysiert und mögliche Hilfen angepasst werden.

Literatur

Castellsaguer, Q. (2014). *The Triangles Web.* Aufgerufen unter http://www.xtec.cat/~qcastell/ttw/ttweng/portada.html (Stand: 16.03.2018)

Schupp, H. (2002). *Thema mit Variation. Aufgabenvariation im Mathematikunterricht.* Hildesheim: Franzbecker.

Schupp, H. (2006). *Von den Transversalen zurück zur Figur.* In: Malitte, E. et al. (Hrsg.), Die etwas andere Aufgabe. Hildesheim: Franzbecker (S. 125-138)

Weth, T. (2002). *Ortslinien als Hilfsmittel zur Problemlösung.* Aufgerufen unter http://www.didmath.ewf.fau.de/Nuernberger-Kolloquium/2002/weth_n-1Strategie.pdf (Stand: 14.03.2018)