

## „Man muss es ja doch auswendig wissen“ – die Behandlung der Multiplikation zwischen Anspruch und Wirklichkeit

### 1. Problemlage

In der Primarstufe erworbene mathematische Kompetenzen, darunter auch die Kenntnis der Grundaufgabengleichungen der Multiplikation und Division, sind die Grundlage für weiteres schulisches Lernen nicht nur im Fach Mathematik und zugleich Werkzeug zur Bewältigung vieler Anforderungen des alltäglichen Lebens. In den Klassenstufen 2 und 3 wird zu Recht viel Zeit für die Aneignung dieser Grundaufgaben verwendet. Bezüglich der Beherrschung der Grundaufgabengleichungen gibt es zwei wesentliche Ziele: **Einmal** geht es um das inhaltliche Verständnis der Operationen und damit u.a. auch um Kenntnisse über die Beziehungen zwischen den einzelnen Aufgaben. Lorenz (2007) stellt die Bedeutung des Aufbaus semantischer Netze heraus: Erkennen Kinder die Beziehungen zwischen den Aufgaben, können sie diese nutzen, um neue Gleichungen zu erarbeiten oder vergessene Gleichungen zu rekonstruieren. **Zum zweiten** geht es um das gedächtnismäßige Beherrschen der Grundaufgabengleichungen: Diese Gleichungen sollen permanent aus dem Gedächtnis reproduziert werden können. Studien wie die von Brandt (2016) und Truppel (2017) zeigen, dass es hier in der Praxis deutliche Probleme gibt: Zu viele Kinder können zwar die Grundaufgaben sicher reproduzieren, besitzen aber kein inhaltliches Verständnis der Operationen Multiplikation und vor allem Division.

Brandt führte bei 274 Kindern in der Mitte des dritten Schuljahres einen Schnellrechentest durch. Ca. 60 % der Kinder lösten 70 oder mehr der 80 gestellten Aufgaben zügig und richtig. In anschließenden Interviews wurde deutlich, dass viele dieser Kinder die Bedeutung des Terms  $a \cdot b$  nicht erklären konnten.

In der Studie von Truppel erhielten 218 Fünftklässler zu Beginn des Schuljahres 30 Grundaufgaben in Termform. Nur 65% der Schülerinnen und Schüler konnten 30 bzw. 29 Aufgaben in 3 Minuten durch Reproduzieren lösen. Beträchtliche 22,5% der Kinder hatten zwischen 5 und 15 Fehlern und immerhin 10% (!) der Kinder hatten weniger als die Hälfte der Aufgaben korrekt gelöst. Im anschließenden Interview waren die meisten der zufällig ausgewählt interviewten Schülerinnen und Schüler nicht in der Lage, die Bedeutung der Terme  $a \cdot b$  und  $a : b$  zu erklären und die Lösung etwa mit einer Geschichte oder einem Bild zu begründen.

Es gibt de facto vier Gruppen von Kindern:

	Bedeutung der Operation inhaltlich erfasst	Gleichungen eingepägt
A	ja	ja
B	ja	nein
C	nein	ja
D	nein	nein

Beide Studien zeigen, dass es zu viele Kinder in den Gruppen C und D gibt. Während Kinder der Gruppen B und D im Unterricht auffallen, sind Kinder der Gruppe C solange unauffällig, wie kein Transfer gefordert wird. Erst bei neuen, noch nicht eingepägte Aufgaben oder beim Lösen von Sachaufgaben fallen diese auf. Insbesondere in der Gruppe B gibt es Kinder, die zwar die Bedeutung der Operation kennen, aber keine semantischen Netze aufgebaut haben und sich so jede Gleichung als isolierten Fakt einprägen. In Gruppe C gibt es Kinder, die alle Gleichungen – etwa mit diversen Reimen – formal isoliert auswendig gelernt haben und andere, die insbesondere die Gleichungen der Division mit Gleichungen der Multiplikation begründen können. Sie begründen mit der „Umkehraufgabe“, sagen z.B.  $56 : 7 = 8$ , weil  $8 \cdot 7 = 56$  ist. Die Bedeutung einer oder beider Gleichungen, vor allem die der Division, kennen diese Kinder nicht. In verschiedenen Studien (Bülow 1982, Ahlemann 1979, Bönig 1995) wird deutlich, dass die Lehrerinnen und Lehrer um die Bedeutung der gedächtnismäßigen Beherrschung der Grundaufgabengleichungen wissen und nach guten Ergebnissen streben. Dennoch zeigen gerade die Studien von Brandt und Truppel nicht nur die oben genannten unbefriedigenden Ergebnisse, sondern auch, dass es oft von Klasse zu Klasse und von Schule zu Schule kaum zu rechtfertigende Niveauunterschiede gibt.

Angesichts all dieser Befunde geht es uns um eine tiefere Analyse des Unterrichts und seiner Ergebnisse. Wir wollen Merkmale einer solchen Unterrichtsgestaltung herausarbeiten, mit der möglichst allen Kindern ein sinnerfülltes Einprägen der Grundaufgabengleichungen ermöglicht wird.

## 2. Zur Anlage der Studie

In der vorliegenden Studie geht es um die Analyse des Unterrichts und seiner Ergebnisse. Bei der *Analyse der Ergebnisse des Unterrichts* stehen folgende Fragen im Mittelpunkt:

- Inwieweit beherrschen die Kinder die Grundaufgabengleichungen gedächtnismäßig?
- Inwieweit haben die Kinder eine inhaltliche Vorstellung davon, was  $a \cdot b$  bedeutet?
- Inwieweit können sie die Grundaufgabengleichungen nicht nur reproduzieren, sondern auch als Werkzeug zum Lösen von neuen Aufgaben und von Sachaufgaben nutzen?

Die *Analyse des Unterrichts* bezieht sich auf die Frage, welches – im Hinblick auf die Arbeit an den Grundaufgaben der Multiplikation und Division – Merkmale einer erfolgreichen Gestaltung des Mathematikunterrichts sind. Die Studie ist eine Längsschnittstudie, an der 535 Schülerinnen und Schülern zu allen Untersuchungszeitpunkten teilnahmen. Sie enthält folgende Teile:

- (1) Grundaufgabentests Ende Kl. 2 sowie Anfang und Ende Kl. 3;
- (2) Interviews mit Kindern der Klasse 2;
- (3) Analyse der konstituierenden Bedingungen des Unterrichts.

### 3. Erste Ergebnisse

#### 3.1 Zu den Grundaufgabentests und deren Ergebnissen

In den Grundaufgabentests wurde erfasst, inwieweit die Schülerinnen und Schüler die Grundaufgaben gedächtnismäßig beherrschten. Dazu wurden jeweils 30 Aufgaben auf Zeit gelöst. Obwohl ausreichend bekannt ist, wie wichtig die Kenntnisse der Grundaufgabengleichungen sind, gibt es viele Kinder, die dies noch nicht in ausreichendem Maße beherrschen.

In der weiteren Arbeit geht es u.a. um eine genauere Analyse von Lösungshäufigkeiten einzelner Aufgaben.

#### 3.2 Zu den Interviews und deren Ergebnissen

Grundaufgaben sind wie alle Terme ohne Variablen ihrem Wesen nach Begriffe. Inhaltliches Verständnis der Grundaufgaben wird daran deutlich, inwieweit die Schülerinnen und Schüler in der Lage sind, diese Begriffe zu identifizieren, zu realisieren und zu systematisieren. Dementsprechend wurden im Interview unter anderen folgende Aufgaben eingesetzt:

**A1:** Schreibe zu diesem Bild eine passende Aufgabe. (Begriffsidentifizierung der Begriffe:  $3 \cdot 4$ ,  $4 \cdot 3$ ,  $12 : 4$ ,  $12 : 3$ ,  $3 + 3 + 3 + 3$ ,  $4 + 4 + 4$ )

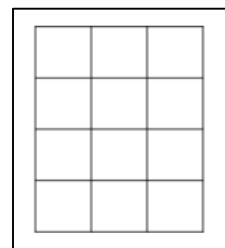


Abbildung 1

**A2:** Zeichne ein Bild, welches zu  $3 \cdot 4$  passt. (Begriffsrealisierung des Begriffs  $3 \cdot 4$ )

**A3:** Welche Aufgabe passt zu diesem Bild? Erkläre. Ändere das Bild so ab, dass es zur Aufgabe  $5 \cdot 3$  passt. (Systematisierung der Begriffe  $4 \cdot 3$  und  $5 \cdot 3$ )



Abbildung 2

Im Interview wurden die Kinder angeregt, beim Begriffsidentifizieren von der enaktiven, der ikonischen und der verbal-symbolischen Ebene in die nonverbal-symbolische Ebene zu wechseln. Bei der Realisierung des Begriffes fand ein Wechsel von der nonverbal-symbolischen Ebene in die enaktive, die ikonische bzw. die verbal-symbolische Ebene statt.

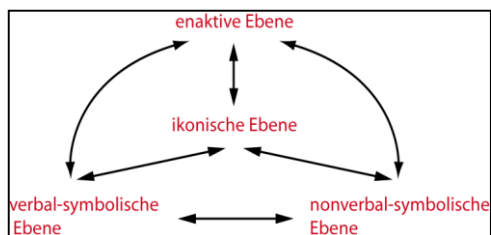


Abbildung 3 (nach Grassmann, 2014)

Beim Systematisieren von Begriffen wurden Beziehungen in der nonverbal-symbolischen Ebene hergestellt und mit Verweis auf die enaktive und die ikonische Ebene begründet.

Die ersten Ergebnisse zeigen, dass viele Kinder zwar in der Lage sind, die Grundaufgabengleichungen zu reproduzieren, aber das Verständnis für die Operationen nicht vorhanden ist. Typische Fehler wurden klassifiziert. Hypothesen zu den diesen Fehlern zugrunde liegenden Fehlvorstellungen wurden generiert. Darauf kann an dieser Stelle nicht umfänglicher eingegangen werden.

#### 4. Ausblick

Die vorliegenden Befunde werden in der weiteren Arbeit tiefergehender ausgewertet und für jede Klasse in Beziehung zum konkreten Arbeiten mit Aufgaben gesetzt (vgl. Fanghänel 2000, Grassmann et al. 2014, Eichler 2017). Dies wird in der nächsten Etappe unserer Untersuchung ausgewertet.

#### Literatur

- Ahlemann, Heinz (1979): *Die Gestaltung des Mathematikunterrichts bei der Behandlung der Grundaufgaben der Multiplikation und Division in Klasse 2 unter besonderer Berücksichtigung des gedächtnismäßigen Beherrschens der Grundaufgabengleichungen*. Dissertation. PH Erfurt / Mühlhausen.
- Bönig, Dagmar (1995): *Multiplikation und Division. Empirische Untersuchungen zum Operationsverständnis bei Grundschulern*, Waxmann Verlag, Münster.
- Brandt, Bettina (2016): *Rechenstrategien und Rechenperformance bei der Multiplikation und Division in Klasse 3 – Analyse und Bilanz*. Examensarbeit. PH Schwäbisch Gmünd.
- Bülow, Ellen (1982): *Zum Mathematikunterricht in der Unterstufe – Ergebnisse und Möglichkeiten zu deren Verbesserung*. Dissertation B. PH Erfurt / Mühlhausen.
- Eichler, Klaus-Peter (2017): Rechnen lernen alle – auf das „Wie“ kommt es an. – in: Huck, Lorenz, Schulz, Andrea (Hrsg.): *Lerntherapie und inklusive Schule*. Duden Institute, Berlin. S. 23 – 43.
- Fanghänel, Günter (2000): Arbeiten mit Aufgaben – ein wesentliches Mittel zur Gestaltung eines modernen Mathematikunterrichts. In: *Mathematikunterricht gestalten*. Berlin: PAETEC. S. 23 – 40.
- Grassmann, Marianne; u.a. (2014): *Mathematikunterricht. Kompetent im Unterricht der Grundschule*, Schneider Verlag Hohengehren, Baltmannsweiler.
- Lorenz, Jens-Holger (2007): Die Repräsentation von Zahlen und Rechenoperationen im kindlichen Kopf. In: *Beiträge zum Mathematikunterricht*. S. 13 – 22.
- Truppel, Daniel (2017): *Grundaufgabenkenntnisse der Multiplikation und Division sowie deren Anwendung in Klasse 5 – Analyse, Bilanz und Hauptrichtung der Weiterentwicklung*. Examensarbeit. PH Schwäbisch Gmünd.