

Typische Schülerfehler bei der Achsenspiegelung – Eine Analyse von Schülerantworten

1. Forschungsstand zu Achsenspiegelungen

Achsenspiegelungen spielen im Geometrieunterricht der Grundschule eine wichtige Rolle. Nicht nur das Erkennen von Symmetrien, sondern auch das Beschreiben und Nutzen von Achsensymmetrien wird in der vierten Klasse gefordert (KMK, 2005). Bezüglich der Achsenspiegelung werden im Folgenden zwei Konzepte unterschieden: Achsenspiegelungen, die zu einer symmetrischen Figur führen, und Achsenspiegelungen, die zu zwei kongruenten Figuren führen.

Schulanfänger sind in der Lage, Figurenhälften (z. B. Hälften eines Sterns oder eines Herzens) an einer Achse zu symmetrischen Figuren zu ergänzen (Höglinger & Senftleben, 1997). Dabei treten Schwierigkeiten auf, wenn die entstehende Figur nicht erkannt beziehungsweise nicht im Kopf vollendet werden kann. Des Weiteren ist die Wiedergabe von Details der Figur für Kinder in diesem Alter eine besondere Herausforderung. Neben der Detailwiedergabe stellen Studien die Lage der Achse als schwierigkeitsgenerierendes Merkmal heraus: der Umgang mit vertikalen Spiegelachsen fällt Kindern (auch in der vierten Klasse) leichter als der mit horizontalen Spiegelachsen. Mehrere Studien belegen, dass Spiegelungen an schrägen Achsen am schwersten sind (bspw. Bornstein & Stiles-Davis, 1984; Schmidt, 1986). Ergänzen Vorschul- und Grundschul Kinder achsensymmetrische Figuren fehlerhaft, so erfolgt die Fertigstellung der Figur oft als halbkreisartiges Gegenstück, Alltagsvorstellungen entsprechend oder als Verschiebung der Figur.

Studien, die zu zwei kongruenten Figuren führende Achsenspiegelungen in den Blick nehmen, arbeiten ebenfalls schwierigkeitsbestimmende Merkmale heraus. Küchemann (1981) fand in seiner Studie mit ca. 1000 Schülerinnen und Schülern im Alter von 13-15 Jahren heraus, dass auch hier die Lage der Achse einen Einfluss auf die Lösungsquote der Aufgabe hat. Zudem wirken sich die Komplexität eines Objektes (Punkt oder Strecke) und die Neigung des Objektes zur Achse beziehungsweise die Notwendigkeit einer Winkelkoordination zwischen Objekt und Achse auf die Aufgabenschwierigkeit aus. Häufige Fehlerbilder sind die Parallelität von Strecke und gespiegelter Strecke oder das Ignorieren schräger Achsen (Küchemann, 1981; Grenier, 1985). Grenier (1985) beschreibt bei der Spiegelung an schrägen Achsen das Phänomen des „*rappel horizontal* bzw. *vertical*“ – das Verschieben der Figur in horizontaler bzw. vertikaler Richtung über die schräge Achse hinweg (vgl.

auch Küchemann, 1981). Sind komplexere Objekte zu spiegeln, gehen die Schülerinnen und Schüler in ihrem Lösungsprozess wenig analytisch vor. Meist werden nur einzelne Punkte einer Strecke korrekt an der Achse gespiegelt. Ausgehend von einem Spiegelpunkt wird die Figur (aus der Vorstellung) vervollständigt – ohne weiteres analytisches Übertragen anderer Punkte der Figur (vgl. Analysen von Grenier, 1985).

Zusammenfassend lässt sich sagen, dass zum Ergänzen zu achsensymmetrischen Figuren einige Studien im Vorschul- und Grundschulbereich vorliegen (Bornstein & Stiles-Davis, 1984; Höglinger & Senftleben, 1997; Schmidt, 1986). Studien zu Achsenspiegelungen, die zu zwei kongruenten Figuren führen, sind überwiegend mit älteren Kindern, kaum jedoch mit Grundschulkindern durchgeführt worden (Küchemann, 1981; Grenier, 1985). Sie fokussieren die Spiegelung von Punkten, Strecken und Fahnen, nicht jedoch die Spiegelung von Figuren, wie im Unterricht der Grundschule üblich.

2. Forschungsfragen

Basierend auf diesen Erkenntnissen stellt sich die Frage, ob Ergebnisse aus Studien zum Ergänzen achsensymmetrischer Figuren auf Lösungen von Grundschulern bei Achsenspiegelungen, die zu zwei kongruenten Figuren führen, übertragen werden können. Zudem soll geklärt werden, inwiefern unterschiedliche fehlerhafte Vorgehensweisen bei der Spiegelung von Figuren zu beobachten sind, je nach Lage der Achse, Komplexität und Lage der Figur.

3. Methode und Design der Studie

Die vorliegende Untersuchung umfasst 16 Items aus Erprobungsstudien¹ im Fach Mathematik im Inhaltsbereich *Raum und Form*. Die Aufgabenerstellung erfolgte durch systematische Variation der unterschiedlichen schwierigkeitsbestimmenden Merkmale (z. B. Komplexität der Figur, etc.; Beispielaufgaben s. *Abb. 1-3*). In einem Paper-Pencil-Test wurde jedes Item von 250 bis 300 Kindern am Ende von Jahrgangsstufe 3 bearbeitet. Anschließend fand eine Rasch-Skalierung und Zuordnung der Aufgaben zu Kompetenzstufen (KMK, 2008) statt. Qualitative Analysen der vorliegenden Schülerdokumente führten zur Kategorisierung fehlerhafter Schülerlösungen in Fehlergruppen. Diese Kategorisierung diente als Basis für weitere Betrachtungen, die zum Ziel hatten, Zusammenhänge zwischen schwierigkeitsbestimmenden Merkmalen der Aufgaben (z. B. Lage der Achse) und speziellen Fehlergruppen herauszustellen.

¹ Die Datenerhebungen und -analysen wurden durch das Institut zur Qualitätsentwicklung im Bildungswesen – Wissenschaftliche Einrichtung der Länder an der Humboldt-Universität zu Berlin e.V. durchgeführt.

4. Ergebnisse

Es konnten unterschiedliche schwierigkeitsgenerierende Merkmale bei der Achsenspiegelung von Figuren identifiziert werden. Dabei können allgemeine Fehler (unabhängig von der Lage der Achse oder der Figur) und spezielle Fehler (abhängig von der Lage der Achse oder der Figur) unterschieden werden. Typische allgemeine Fehler sind ein falscher Abstand der Spiegefigur zur Achse oder die Verschiebung der Figur parallel zum Blattrand.

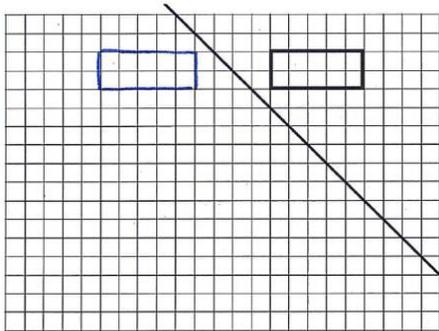


Abb. 1: Verschiebung einer horizontal ausgerichteten Figur überwiegend in horizontaler Richtung

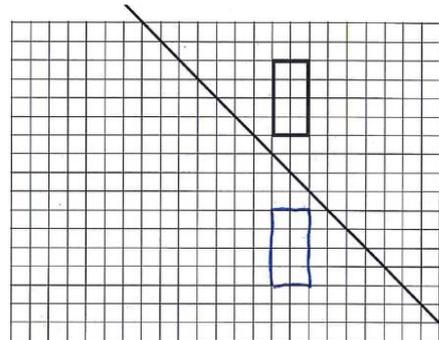


Abb. 2: Verschiebung einer vertikal ausgerichteten Figur überwiegend in vertikaler Richtung

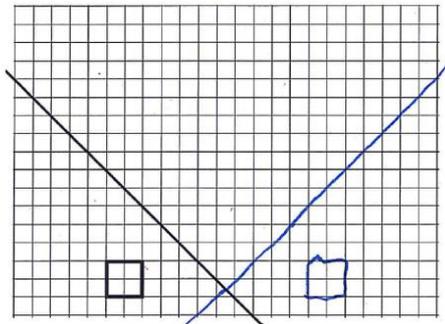


Abb. 3: „Mitspiegelung“ der Achse (an einer fiktiven Achse)

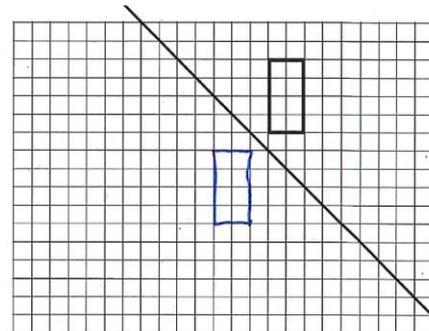


Abb. 4: 180° Grad Drehung der Figur (Drehpunkt auf der Achse)

Als spezielle Fehler lassen sich einige Fehlerbilder nur bei der Spiegelung an schrägen Achsen finden. Dazu zählen der „*rappel horizontal* und *vertical*“. Zusätzlich zu dem von Küchemann (1981) und Grenier (1985) beschriebenen Phänomen zeigt die detaillierte Betrachtung der Schülerlösungen, dass jedoch die Figur entscheidenden Einfluss auf die Richtung des „*rappel*“ hat. Ist die längere Symmetrieachse einer Figur vertikal ausgerichtet, wird überwiegend vertikal verschoben (häufigster Fehler mit über 30%; vgl. Abb. 1), und ist die längere Symmetrieachse horizontal ausgerichtet, wird überwiegend horizontal verschoben (häufigster Fehler mit 23%; vgl. Abb. 2). Auch beliebig scheinende Verschiebungen zählen zu den häufig auftretenden Fehlerbildern. Auffällig sind zwei weitere Fehlergruppen bei allen Spiegelungen an schrägen Achsen: Zum einen die „Mitspiegelung der Achse

als Teil der Figur“ an einer selbstgedachten Achse (*Abb. 3*) und zum anderen eine Bearbeitung, die als „180°-Drehung der Figur mit Drehpunkt auf der Achse“ beschrieben werden kann (*Abb. 4*). Unklar ist dabei, ob die Figur tatsächlich im Kopf gedreht wurde, oder ob etwa fehlendes analytisches Vorgehen – Übertragen eines einzigen Punktes der Figur und Vervollständigung „aus dem Gefühl“ – Ursache dieser Lösung ist.

5. Konsequenzen und Perspektiven

Erkenntnisse aus Studien, die die Ergänzung zu symmetrischen Figuren untersuchen, können also auf Achsenspiegelungen, die zu zwei kongruenten Figuren führen, übertragen werden – vor allem die Verschiebung von Figuren tritt häufig auf und die Lage der Achse ist schwierigkeitsbestimmend.

Es lässt sich zusammenfassend festhalten, dass die Betrachtung von Schülerdokumenten sowohl spezifische Fehlergruppen bei unterschiedlichen Aufgaben zur Achsenspiegelung aufdeckt als auch Rückschlüsse auf Aufgabenschwierigkeiten zulässt. Über die vorliegenden Fehlvorstellungen bei Kindern lassen sich jedoch nur Vermutungen anstellen – beispielsweise wie Lösungen aus *Abb. 3* und *Abb. 4* entstanden sein könnten. An dieser Stelle stößt die Aussagekraft schriftlicher Schülerdokumente an ihre Grenzen und es wären Interviews nötig. Aus diagnostischer Sicht zeigt sich in dieser Studie deutlich die Bedeutung der Auswahl geeigneter Aufgaben zur Achsenspiegelung. Eigenschaften der Figur sollten mit Bedacht gewählt werden, so dass eine Analyse der Lösung Aufschluss darüber geben kann, ob beispielsweise verschoben oder gespiegelt wurde. Für den Unterricht ergibt sich zudem die Notwendigkeit, Aufgaben zur Achsenspiegelung zu variieren, um das dominante Bild der vertikalen Achse abzuschwächen.

6. Literatur

- Bornstein, M.H. & Stiles-Davis, J. (1984): Discrimination and Memory for Symmetry in Young Children. *Developmental Psychology*, 20(4), 637-649.
- Grenier, D. (1985): Quelques aspects de la symétrie orthogonale pour des élèves de classes de 4ème et 3ème. *Petit x*, n°7, 57-69.
- Kultusministerkonferenz (KMK) (2005): Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Primarbereich. Beschluss vom 15.10.2004. Köln: Luchterhand.
- Kultusministerkonferenz (KMK) (2008): Kompetenzstufenmodell zu den Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Primarbereich (Jahrgangsstufe 4). <https://www.iqb.hu-berlin.de/bista/ksm> [aufgerufen am 13.3.2018].
- Küchemann, D. (1981): Reflection and rotation. In K. Hart (Hrsg.). *Children's understanding of mathematics*. London: John Murray.
- Schmidt, R. (1986): Geometrische Kenntnisse, Fähigkeiten und Fertigkeiten am Ende der Grundschulzeit: Ergebnisse einer Untersuchung. Gießen: Justus-Liebig-Universität.