

Daniel GRIESER, Oldenburg & Reinhard HOCHMUTH, Hannover

## **Mathematik lehren an der Hochschule: Perspektiven aus Mathematik und Didaktik**

In diesem Beitrag beleuchten wir einige grundlegende Aspekte des Lehrens und Lernens von Mathematik an Hochschulen und zeigen Kooperationsmöglichkeiten zwischen Fach-Mathematik und Didaktik auf.

### **Ein (nicht ganz so) hypothetisches Gespräch**

Ein Didaktiker (D) und eine Mathematikerin (M) treffen sich auf dem Flur.

D: Hallo, Frau Kollegin M, wie geht's?

M: Guten Morgen, Herr D. Habe gerade die Analysis 1 Klausur korrigiert. Da ist ja wieder einiges schiefgelaufen. Zum Beispiel war in einer Aufgabe der Zwischenwertsatz zu formulieren. Den haben wir ausführlich behandelt. Aber mehr als die Hälfte der Leute bringt die Quantoren durcheinander. Sie wissen schon: unter den entsprechenden Voraussetzungen an die Funktion  $f$  gilt: Zu jedem  $c$  gibt es ein  $t$  mit  $f(t)=c$ . Aber die schreiben: es gibt ein  $c$  und ein  $t$  ...

D: Es sind nicht nur die Quantoren alleine, sondern auch der Umgang mit den Variablen. Variablenaspekte sind ein weiteres Sek 1 Defizit.

M: Wie bitte? Also ich würde einfach sagen, die sollen sich jetzt mal richtig anstrengen oder etwas anderes studieren. Es gibt ja auch andere, die's richtig gemacht haben.

D: Wahrscheinlich lag's an Ihrer Vorlesung. Für Sie ist natürlich alles klar, wie sollen Sie da auf die Studienanfänger eingehen können. Wenn Sie mal eine vernünftige hochschuldidaktische Fortbildung besucht hätten, dann wäre die Klausur sicher besser ausgefallen.

M: Ach ja? Das bringt doch nichts. Die Leute, die solche Kurse leiten, haben doch keine Ahnung von der Mathematik und ihren speziellen Anforderungen.

*Das Gespräch könnte aber auch anders verlaufen. Etwa nach der Feststellung über die falschen Quantoren:*

D: Ja, der korrekte Umgang mit Quantoren ist am Anfang schwierig.

M: Interessant war noch Folgendes: in einer anderen Aufgabe musste der Zwischenwertsatz angewendet werden, um zu zeigen, dass eine Gleichung eine Lösung hat. Das haben die meisten richtig gemacht.

D: Das heißt also, viele Studenten haben ein intuitives Verständnis des Satzes. Aber die allgemeine Formulierung fällt ihnen schwer.

M: Ich frage mich, wie man sie besser darin unterstützen kann, solche Formulierungen zu beherrschen. Ich kann mir aber auch vorstellen, dass das einfach eine Frage der Zeit ist, und im 1. Semester kann man gar nicht so viel mehr Unterstützung geben.

D: Das wäre wichtig zu wissen: sollten wir mehr Ressourcen für Unterstützung bereitstellen, oder können wir diese woanders besser einsetzen? Und wenn es eine Frage der Zeit ist, müssen wir ihnen die Gelegenheit geben, das in weiteren Veranstaltungen wieder aufzugreifen. Ich schlage vor, dass wir das einmal genauer untersuchen.

## **Ein Lehr-Lern-Dilemma**

Bereits Luhmann und Schorr (1982) haben darauf hingewiesen, dass mit institutionalisierter Lehre zwar ein Anspruch auf das Lernen der Belehrteten gesetzt ist, erfolgreiches Lernen aber vom Lehrenden alleine nicht gesichert werden kann: Jedes Lehren ist auf geeignete Lernaktivitäten der Belehrteten angewiesen. Insbesondere ein Lernen, das auf neue Inhaltsbereiche zielt und bisher erfolgreich angewendete Lernprinzipien in Frage stellt, wie es in der Regel ein Mathematikstudium im Übergang von der Schule zur Hochschule verlangt, erfordert intentionales Lernen (vgl. etwa Holzkamp, 1993). Dieses schließt ein, dass Belehrtete Lernobjekte für sich als subjektiv relevantes Lernproblem anerkennen. Dieser Schritt des Belehrteten zum Lernenden kann vom Lehrenden nicht erzwungen werden. Es liegt sogar nahe, dass diverse und nicht selten etablierte „Erzwingungsmaßnahmen“ (etwa Klausuren) zwar zu Aktivitäten von Belehrteten führen, tiefes intentionales Lernen teilweise aber eher erschweren (Hardy, 2009).

Didaktische und methodische Überlegungen zielen darauf, die Differenz zwischen Vermittlungsabsicht und Aneignungsergebnissen von Belehrteten zu verringern und suchen daher nach Stellschrauben bzw. Variablen im Lehr-Lern-Zusammenhang, welche in dieser Hinsicht die größte Wirkung versprechen. Historisch lässt sich beobachten, dass verschiedene Ansätze (z.B. Instruktionsdidaktik, Neue Mathematik, Kompetenzorientierung) immer auch, etwa aus „Werbegründen“, versprochen, das angesprochene Dilemma ein Stück weit zu überwinden. Ein solches Versprechen klingt auch im eingangs formulierten Gespräch an. Bürokratie (etwa Universitätsleitungen) und Politik (etwa Ministerialbehörden) sind entsprechend ihrer institutionellen Rollen daran interessiert, Lernerfolge sicherzustellen, und möchten dafür „Rezepte“, dabei wohl wissend, dass solche schwerlich möglich sind. Die in solchen Kontexten gelegentlich gemachten Versprechungen können naturgemäß nicht gehalten werden und stellen eine Quelle von Missverständnissen zwischen Fachdidaktikern und Mathematikern dar.

## **Was macht die Hochschuldidaktik Mathematik?**

Im letzten Jahrzehnt hat sich national und international mathematikbezogene Hochschuldidaktik als eigenes Forschungsgebiet stark entwickelt. Die Akteure dieses Prozesses bilden eine heterogene Gruppe aus „reflektierenden“ Lehrenden, aus allgemein-hochschuldidaktischen Coaches und Fortbildnern für Lehrprojekte, aus MitarbeiterInnen der Hochschulqualitätssicherung und des Hochschulmanagements und aus Vertretern einer fachbezogenen hochschuldidaktischen Forschung mit unterschiedlichen disziplinären

Anbindungen. Die inhaltlich und methodisch gewichtigste Anbindung erfolgte an die schulbezogene Fachdidaktik. Gestützt und gefördert wurde dieser Prozess durch zahlreiche Fördermaßnahmen von Stiftungen (u.a. Telekom, Volkswagen-Stiftung), aber auch durch die sog. QPL-Maßnahmen.

National etablierten sich in diesem Prozess u.a. das Kompetenzzentrum Hochschuldidaktik Mathematik (Biehler et al., 2016) und der Arbeitskreis Hochschulmathematikdidaktik der GDM. International gewannen bereits existierende Institutionen an Bedeutung: SEFI, in Großbritannien das SIGMA-Network, in Norwegen MATRIC und in den USA RUME. Die wissenschaftliche Entwicklung reflektiert sich u.a. in zahlreicher werdenden Beiträgen auf Fachdidaktik-Tagungen wie CERME (vgl. Winslow et al., 2018) oder ICME (vgl. Biza et al. 2016) oder auch an neuen internationalen Netzwerken wie INDRUM (vgl. Nardi et al., 2016).

Forschungsbezogen lassen sich die folgenden vier Studientypen unterscheiden: Beobachtungsstudien mit etwa dem Ziel der Diagnose („Beschreiben“ und „Verstehen“ von Lehr-/Lernprozessen auf theoretischer Basis unter Berücksichtigung institutioneller Rahmenbedingungen usw.), sog. Interventionsstudien, die auf das Design von Lehrinterventionen zielen, empirische Begleitstudien (Variation einer Bedingung (Randomisierung) in einer LV, Quasi-Experiment im Kohortenvergleich usw.) und nicht zuletzt Studien mit Bezügen zur Philosophie, Epistemologie und „Stoffdidaktik“ von Teilgebieten der Mathematik (Vergleich verschiedener Zugänge zu Begriffen, Mathematik in verschiedenen „communities of practice“ usw.).

### **Ansichten eines Mathematikers zur Lehre**

Die Lehre ist nicht selten Gesprächsthema zwischen MathematikerInnen, sei es in formalem Rahmen, etwa in Gremien, oder in informellem Rahmen, etwa beim Mittagessen oder in Pausengesprächen auf Tagungen. Dabei gibt es durchaus verschiedene Meinungen, doch folgende Punkte, die zunächst eher persönliche Ansichten von DG wiedergeben, werden von vielen geteilt.

- **„Ich habe etwas erst dann richtig verstanden, wenn ich es erklären kann.“**

Damit ist Lehre auf ganz basaler Ebene mit dem eigenen Verstehen und Erleben von Mathematik verknüpft. Häufig hört man „Ich möchte das Thema X endlich verstehen, deswegen mache ich eine Vorlesung darüber.“ Andererseits bedeutet dies, dass man Lernenden viele Chancen geben sollte, Dinge selbst zu erklären.

- Mathematik lernen ist vielschichtig: rechnen, verstehen, formulieren, kreativ sein, usw. Eine gute Lehrveranstaltung geht auf alle diese Aspekte ein.

- Lehrende haben vielfältige Funktionen:
  - erklären, den Stoff strukturieren: die stereotypischen Funktionen einer Vorlesung
  - zum selbst Denken anregen
  - **Vorbild** sein: Kinder lernen sprechen durch Nachahmen. Das Nachahmen spielt auf jeder Ebene der Lehre eine große Rolle. Dies ist ein zentrales Argument gegen ausschließlich ‚elektronische‘ Lehre.
- Die **Heterogenität** der Lernendengruppe ist eine der größten Herausforderungen in der Lehre. Sie manifestiert sich in unterschiedlichen Fähigkeiten, Wissensständen, bevorzugten internen Repräsentationsweisen (z.B. manche mehr geometrisch, andere mehr algebraisch) usw. Gute Lehre spricht viele verschiedene Lernende an.
- Lehre ist eine **Kunst**: die hohe Anzahl von Variablen, die den Erfolg von Lehre beeinflussen und die man nicht alle steuern kann, scheint eine systematische Betrachtung von Lehre unmöglich zu machen. Auch wenn manche „Stellschrauben“ benennbar sind, bleibt es doch schwer definierbar, was gute Lehre ausmacht.
- Die große Distanz zwischen Lehrenden und Lernenden (in Wissen, Lebensalter usw.) birgt die **Gefahr des Realitätsverlustes** durch die Lehrenden bezogen auf die Lehrsituation. Dem kann die eigene Forschung entgegenwirken, da sie einen immer wieder in die Situation des Lernenden bringt und damit Empathie ermöglicht. Auch ist es wichtig, sich als Lehrende(r) daran zu erinnern, dass man manche Grundlagen auch erst im Laufe der Jahre verstanden hat – und daher den Lernenden Unvollkommenheit zuzugestehen.

### **Beispiel für eine Kooperation: MPB & WiGeMath**

An diesem Beispiel soll u.a. mit Verweis auf einen anderen Beitrag der Tagung erläutert werden, wie eine erfolgreiche Kooperation aussehen kann, welche die beiden oben kurz skizzierten Perspektiven verknüpft.

Das vom BMBF geförderte Verbundprojekt WiGeMath (Biehler et al., 2018) untersucht, ob, wie und unter welchen Bedingungen Maßnahmen wirken, die mathematikbezogenes Lernen in der Studieneingangsphase unterstützen sollen. Dazu kooperiert das Projekt mit VertreterInnen von 14 Universitäten. Es fokussiert auf die Maßnahmen Vorkurse, Brückenvorlesungen und Lernzentren. Brückenvorlesungen sind reguläre, nicht-traditionelle Lehrveranstaltungen mit dem Ziel, Probleme in der Studieneingangsphase abzumildern. Sie werden i.d.R. von nicht hauptsächlich didaktisch forschenden Lehrenden

(Grieser, 2016; Hilgert et al., 2015) entwickelt und in diesem Zusammenhang didaktisch exemplarisch diskutiert (Grieser, 2016), sind bisher aber wenig systematisch beforscht.

Im Rahmen von WiGeMath wird u.a. die Brückenvorlesung *Mathematisches Problemlösen und Beweisen* (MPB) untersucht, die seit 2011 in Oldenburg etabliert ist. Deren Ziele sind u.a. das Lernen von Problemlösestrategien, das Wertschätzen von Beweisen und das Erleben von Selbstwirksamkeit durch die Studierenden. Dazu werden Lösungen zu Problemen, die meist aus der Schule bekannten Kontexten entstammen, erarbeitet, wobei der Suchprozess einschließlich Irrwegen und Strategien, aus diesen herauszufinden, explizit gemacht und anschließend reflektiert wird. Dabei bekommen die Studierenden während der Vorlesung Zeit für eigene Problemlöseversuche und stehen im ständigen Dialog mit dem Dozenten.

In WiGeMath wurden drei verschiedene Studien durchgeführt: Eine Beobachtungsstudie, die vor allem auf die Qualität der Umsetzung der Lehrveranstaltung zielt, eine Evaluation aus Studierendenperspektive und eine konstruktbierte Evaluation mit dem Ziel eines empirischen Nachweises von Wirkungen. Für Details sei auf (Liebendörfer et al. 2018) verwiesen. Kurz zusammengefasst führen die drei Teilstudien „Beobachtung“, „Evaluation“ und „Wirkungsforschung“ u.a. auf folgende Ergebnisse: Die nicht-traditionelle Umsetzung ist zu beobachten. Studierende wertschätzen die neuen Ziele und verknüpfen die spezifische Maßnahmegestaltung mit den von Ihnen wahrgenommenen Wirkungen. Positive Effekte auf affektive Variablen verglichen mit traditioneller Lehre lassen sich empirisch nachweisen.

WiGeMath deckt, grob zusammengefasst, die beiden Forschungsparadigmen „Empirische Bildungsforschung“ und „Programmevaluation“ ab. Beide Paradigmen sind zwar auf eine Zusammenarbeit von Mathematiklehrenden und hochschuldidaktisch Forschenden angewiesen, das Fachliche selbst bleibt dabei aber im engeren Sinne außen vor, auch wenn es bei der Entwicklung von Erhebungsinstrumenten teilweise (etwa bei Lernstrategien) eine Rolle spielt. Auf eine Forschungsperspektive, bei der dies anders ist und bei der die Kooperation auch enger gestaltet werden kann und sollte, wollen wir im letzten Abschnitt eingehen.

### **Kooperationsperspektive „Mathematik, Stoffdidaktik und Entwicklungsforschung“**

Stoffdidaktik, also didaktisch orientierte Sachanalyse, verfolgt unter anderem das Ziel, mathematisches Wissen so aufzubereiten, dass es den kognitiven Fähigkeiten der Lernenden und deren psychologischen Erfahrungen entspricht (Hefendehl-Hebeker, 2016). Kirsch (1977) zählt dazu Aktivitäten

wie: Themen und Zugänge vereinfachen, Umfeld, Vorwissen und Anschlüsse beachten, Aktivieren von Vorwissen, Konzentration auf den Kern der Sache etc. Dies gehört zum Kern dessen, was MathematikerInnen bedenken, wenn sie eigene Lehre vorbereiten. Sie berufen sich wie die klassische Stoffdidaktik in der Regel auf die eigene Erfahrung und führen keine systematischen empirischen Untersuchungen durch. Wie dies durch Verknüpfung mit Vorgehensweisen aus der Entwicklungsforschung geschehen kann, haben etwa Hußmann und Prediger (2016) differenziert dargestellt. Verwiesen sei in diesem Zusammenhang auf verwandte Forschungszugänge wie etwa Didactical Engineering, TDS und ATD (Artigue 2015; Brousseau 1997; Chevallard 1992), „Design Research“ (Cobb & Gravemeijer, 2006) und „Design Science“ (Wittmann, 1995).

Der Kern dieser Verknüpfung besteht darin, stoffdidaktische Überlegungen als (wenn auch jeweils unterschiedlich relevantes) Moment von vier Stationen (kurz: Lerngegenstand spezifizieren und strukturieren; Lehreinheit (weiter-)entwickeln; Lehr-Experiment durchführen & analysieren; lokale Theorie (weiter-)entwickeln) aufzuweisen und umgekehrt, jede der Stationen in ihrem empirischen Moment als bereichernd für die stoffdidaktische Analyse mathematischer Gegenstandsbereiche zu begreifen.

Grob lassen sich so in dem Forschungszyklus aus vier Stationen eine stoffdidaktische Perspektive (Welche Konzepte, Sätze, Ideen, Grundvorstellungen etc. sind zentral? Was sind Kernfragen, Kontexte, Lerntrajektorien? Wie in LV umsetzen?) und eine empirische Perspektive (Individuelle Lern- und Verstehensprozesse, Fehlvorstellungen etc., konkrete Hürden, fruchtbare Einstiege, Probleme) unterscheiden.

Die folgenden Beispiele sollen illustrieren, dass die stoffdidaktische Perspektive übliche Überlegungen von Mathematiklehrenden anspricht: Die Idee des skalenbezogenen Zerlegens und Zusammenfügens im Kontext von Wavelet-basierten Bildbearbeitungsalgorithmen kann als Grundvorstellung im Sinne der Fachdidaktik aufgefasst werden. Fachliche Überlegungen im Kontext der Einführung des Dirac-Impulses in elektrotechnischen Signaltheorie-Lehrveranstaltungen können unter anderem mittels fachdidaktischer Begriffe aus der ATD rekonstruiert werden (Hochmuth et al., 2016). Bei der Behandlung des Satzes über implizite Funktionen wählen Lehrende unterschiedliche Zugänge – z.B. eher geometrisch direkt an der Niveaumenge orientiert (Idee der vertikalen Tangente), oder geometrisch am „Gebirge“ des Funktionsgraphen, oder eher algebraisch, indem zunächst der Fall linearer Abbildungen rechnerisch behandelt wird. Während für ein tiefes Verständnis alle Perspektiven wichtig sind, kann die Frage gestellt werden, welche im Lehrkontext am ehesten einen guten Einstieg ermöglicht und daher an den

Anfang gestellt werden sollte. Wichtige Aspekte, die eine solche Untersuchung berücksichtigen muss, sind hierbei u.a. die verschiedenen bevorzugten Repräsentationsweisen der Studierenden und auch der Lehrenden (die damit die eine oder andere Perspektive überzeugender darstellen können).

## Zusammenfassung

Unser Beitrag verdeutlicht zum einen verschiedene Perspektiven von M und D, zeigt aber auch deren Komplementarität und vielfältige Möglichkeiten der Kooperation auf. Auf fachdidaktischer Seite konnte dies sowohl für die sog. Empirische Bildungsforschung, Methoden der sog. Programmevaluation sowie für eine spezifische Verknüpfung von Mathematik, Stoffdidaktik und Entwicklungsforschung illustriert werden. Die zuletzt genannte Perspektive bietet u.E. eine besonders enge Kooperationsmöglichkeit, bei der Fachliches und Empirisches, Mathematik und Didaktik sowie epistemologische Aspekte stärker ineinandergreifen.

Dabei stellt wechselseitiger Respekt eine wichtige Bedingung für die Realisierung von Kooperationen dar. Andererseits sollen mit dieser Bemerkung vorhandene „echte“ Hürden, etwa im Zusammenhang des eingangs genannten Dilemmas, nicht übergangen oder trivialisiert werden.

## Literatur

- Artigue, M. (2015). Perspectives on Design Research: The Case of Didactical Engineering. In *Approaches to qualitative research in mathematics education* (S. 467-496). Springer, Dordrecht.
- Biehler, R., Hochmuth, R., Rück, H. G., Göller, R., Hoppenbrock, A., Liebendörfer, M., & Püschel, J. (2016). Research in University Mathematics Education: The khdm. *EMS Newsletter*, 12(102), 49-50.
- Biehler, R., Hochmuth, R., Schaper, N., Kuklinski, C., Lankeit, E., Leis, E., ..., Schürmann, M. (2018). Verbundprojekt WiGeMath: Wirkung und Gelingensbedingungen von Unterstützungsmaßnahmen für mathematikbezogenes Lernen in der Studieneingangsphase. In A. Hanft, F. Bischoff, & S. Kretschmer (Hrsg.), *3. Auswertungsworkshop der Begleitforschung. Dokumentation der Projektbeiträge*. (S. 32-41). Carl von Ossietzky Universität Oldenburg, Oldenburg.
- Biza, I., Giraldo, V., Hochmuth, R., Khakbaz, A., & Rasmussen, C. (2016). Research on teaching and learning mathematics at the tertiary level: State-of-the-art and looking ahead. In *Research on Teaching and Learning Mathematics at the Tertiary Level* (S. 1-32). Springer, Cham.
- Brousseau, G. (1997). *Theory of didactical situations in mathematics* (Edited and translated by N. Balacheff, M. Cooper, R. Sutherland, & V. Warfield). Kluwer, Dordrecht.
- Chevallard, Y. (1992). Fundamental Concepts in Didactics: Perspectives Provided by an Anthropological Approach. *Recherches en didactique des mathématiques, Selected Papers. La Pensée Sauvage, Grenoble*, 131-167.

- Cobb, P., & Gravemeijer, K. (2006). Design research from a learning design perspective. In *Educational design research* (S. 29-63). Routledge, London.
- Grieser, D. (2016). Mathematisches Problemlösen und Beweisen: Ein neues Konzept in der Studieneingangsphase. In *Lehren und Lernen von Mathematik in der Studieneingangsphase* (S. 661-675). Springer, Wiesbaden.
- Hardy, N. (2009). Students' perceptions of institutional practices: The case of limits of functions in college level Calculus courses. *Educational Studies in Mathematics*, 72, 341-358.
- Hefendehl-Hebeker, L. (2016). Subject-matter didactics in German. *Journal für Mathematik-Didaktik*, 37(1), 11-31.
- Hilgert, J., Hoffmann, M., & Panse, A. (2015). *Einführung in mathematisches Denken und Arbeiten: tutoriell und transparent*. Springer, Berlin, Heidelberg.
- Hochmuth, R., & Schreiber, S. (2016). Überlegungen zur Konzeptualisierung mathematischer Kompetenzen im fortgeschrittenen Ingenieurwissenschaftsstudium am Beispiel der Signaltheorie. In *Lehren und Lernen von Mathematik in der Studieneingangsphase* (S. 549-566). Springer, Wiesbaden.
- Holzkamp, K. (1993). *Lernen: Subjektwissenschaftliche Grundlegung*. Frankfurt/M.: Campus.
- Hußmann, S., & Prediger, S. (2016). Specifying and Structuring Mathematical Topics. *Journal für Mathematik-Didaktik*, 37(1), 33-67.
- Kirsch, A. (1977). Aspects of simplification in mathematics teaching. In H. Athen, & H. Kunle (Eds.), *Proceedings of the third international congress on mathematical education* (S. 98-120). Zentralblatt für Didaktik der Mathematik, Karlsruhe.
- Liebolder, M., Kuklinski, C. & Hochmuth, R. (2018). *Auswirkungen von innovativen Vorlesungen für Lehramtsstudierende in der Studieneingangsphase*. In diesem Band.
- Luhmann, N., & Schorr, K. E. (1982). Das Technologiedefizit der Erziehung und die Pädagogik. *Zwischen Technologie und Selbstreferenz. Fragen an die Pädagogik*, 1, 11-40.
- Nardi, E., Winsløw, C., & Hausberger, T. (2016). *Proceedings of the First Conference of the International Network for Didactic Research in University Mathematics (INDRUM 2016, 31. Maech-2 April 2016)*. Montpellier, Frankreich: Universität von Montpellier und INDRUM. <https://hal.archives-ouvertes.fr/INDRUM2016>
- Winsløw, C., Gueudet, G., Hochmuth, R., & Nardi, E. (2018). Research on university mathematics education. In *Developing research in mathematics education-twenty years of communication, cooperation and collaboration in Europe*, 1.
- Wittmann, E. C. (1995). Mathematics education as a 'design science'. *Educational Studies in Mathematics*, 29(4), 355-374.