

Stephan GÜNSTER, Würzburg

Am operativen Prinzip orientierte Aufgaben zur Entwicklung funktionalen Denkens

Funktionales Denken stellt eine der fundamentalen Denkweisen dar, die es im Mathematikunterricht auszubilden gilt. Im Rahmen eines Tablet-Projekts an verschiedenen Gymnasien in Bayern soll die Bedeutung des operativen Prinzips für die Entwicklung funktionalen Denkens untersucht werden. Im Beitrag wird zunächst kurz auf den theoretischen Hintergrund eingegangen; anschließend werden Aufgaben, die im Tablet-unterstützten Unterricht eingesetzt werden können, sowie ein Ausblick auf eine laufende Begleitstudie vorgestellt.

1. Funktionales Denken & das operative Prinzip

Bezüglich des funktionalen Denkens werden typischerweise drei charakteristische Aspekte unterschieden (vgl. Vollrath 1989, S. 7–18): Der *Zuordnungsaspekt* beschreibt, dass eine Funktion einen Zusammenhang zwischen zwei Größen herstellt; der *Kovariationsaspekt* betont, wie sich Änderungen einer Größe auf die ihr zugeordnete abhängige Größe auswirken; Der *Objektaspekt* betrachtet eine Funktion als Ganzes, als neues Objekt.

Als eine Möglichkeit zur Entwicklung funktionalen Denkens bieten sich funktionale Betrachtungen von Operationen und die Untersuchung der durch die Operationen bewirkten Veränderungen an (vgl. Vollrath 1989, S. 21). Dies ist im Sinne des operativen Prinzips, denn „Objekte erfassen bedeutet zu erforschen, wie sie konstruiert sind, und wie sie sich verhalten, wenn auf sie Operationen ausgeübt werden“ (Wittmann 1985, S. 9). Diese Erforschung soll durch gezielte Variation der beteiligten Objekte, Operationen oder Eigenschaften bzw. Beziehungen erfolgen, bei denen sich interessante Wirkungen oder auch Invarianten ergeben. Für die Darstellung dynamischer Vorgänge bietet es sich an, digitale Werkzeuge unterstützend einzusetzen.

Aufgaben fordern typischerweise Schülerinnen und Schüler auf, ausgehend von einer bestimmten Ausgangssituation eine Zielkonfiguration zu erreichen (beispielsweise den Funktionsgraphen einer gegebenen Funktionsgleichung in ein Koordinatensystem einzuzeichnen). Hierfür stehen ihnen gewisse Operationen zu Verfügung. Im Hinblick auf ein operatives Durcharbeiten und damit ein wiederholtes Durchdenken der Beziehungen innerhalb einer

		Funktionales Denken		
		Zuordnung	Kovariation	Objekt
Variation im Sinne des Operativen Prinzips	Ausgangssituation			
	Operationen			
	Zielkonfiguration			

Abb. 1: Durch Variation von Ausgangssituation, zur Verfügung stehender Operationen oder der Zielkonfiguration typischer Tätigkeiten oder Aufgaben zur Entwicklung funktionalen Denken soll dieses im Sinne des operativen Prinzips gefördert werden.

solchen Aufgabe erscheint es sinnvoll, an diesen drei Elementen einer Aufgabenlösung anzusetzen (Günster 2017). Setzt man diese nun in Beziehung zu den Aspekten funktionalen Denkens, ergibt sich das Raster wie in Abbildung 1. Es sollen also gezielt in Situationen, in denen funktionales Denken erfordert ist, Ausgangssituation, Operationen oder Zielkonfiguration variiert werden und die Einflüsse dieser Variationen auf den jeweiligen Aspekt des Funktionalen Denkens untersucht werden. Das Raster dient damit auch als methodische Hilfe zur Erstellung von geeigneten Aufgaben.

2. Aufgabenbeispiele

Im Rahmen einer empirischen Untersuchung werden Klassen der Stufe 8 bayrischer Gymnasien begleitet, für die insbesondere proportionale und lineare Funktionen im Fokus stehen. Eine mögliche Aufgabenstellung zu proportionalen Funktionen lautet: „Es ist ein Quadrat $ABCD$ mit einer Seitenlänge von 2 cm gegeben. Um wieviel ändert sich der Umfang des Quadrats $ABCD$, wenn die Seitenlänge um 1 cm verlängert wird?“ Im Raster wäre sie in der Zelle *Ausgangssituation – Kovariation* zu verordnen, da die Änderung der abhängigen Größe (des Umfangs) nach Variation der Ausgangssituation (Seitenlänge) betrachtet wird. In einem zweiten Aufgabenteil könnte dann passend zur Zelle *Zielkonfiguration – Kovariation* folgende Frage gestellt werden: „Um wie viel muss die Seitenlänge verlängert werden, um einen um 6 cm längeren Umfang zu erhalten?“ Daran anschließend kann die Frage diskutiert werden, ob dies von der ursprünglichen Seitenlänge des Quadrats abhängt und wie sich die Situation verändert, wenn anstelle des Quadrats eine andere Figur, wie zum Beispiel ein Dreieck oder ein Sechseck betrachtet

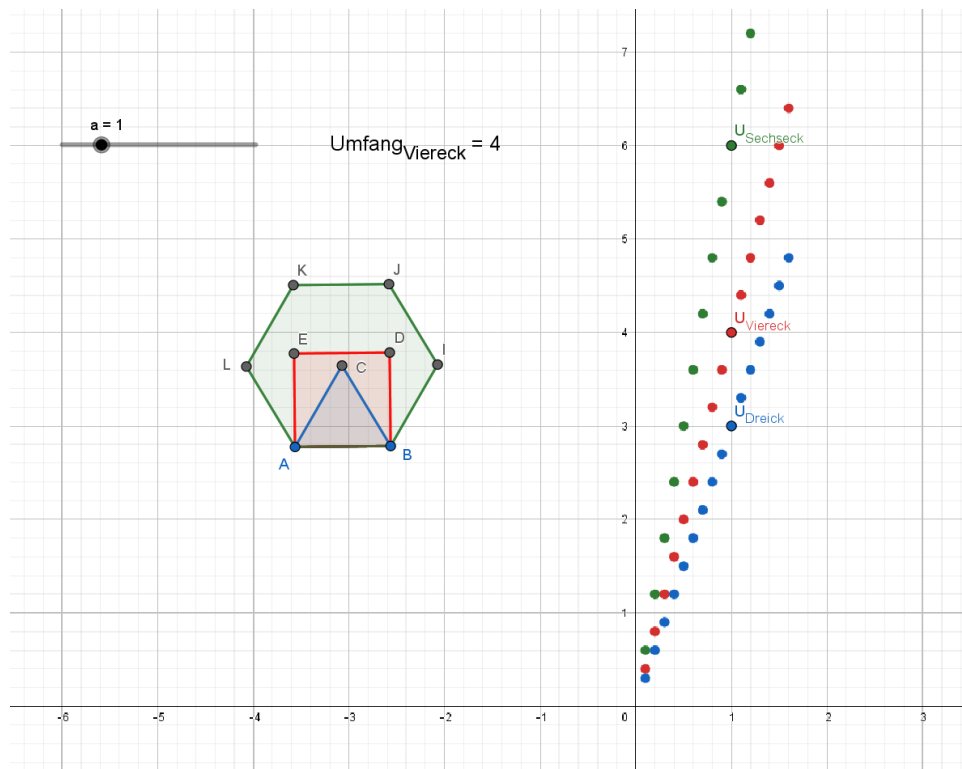


Abb. 2: Untersuchung des Zusammenhangs zwischen Seitenlänge und Umfang regelmäßiger n-Ecke

werden. Ein digitales Werkzeug kann hierbei unterstützend eingesetzt werden, indem die Variation der Seitenlänge mit Hilfe eines Schiebereglers realisiert wird. Außerdem kann mit der Spurfunktion der Zusammenhang zwischen Seitenlänge und Umfang als Ganzes betrachtet werden.

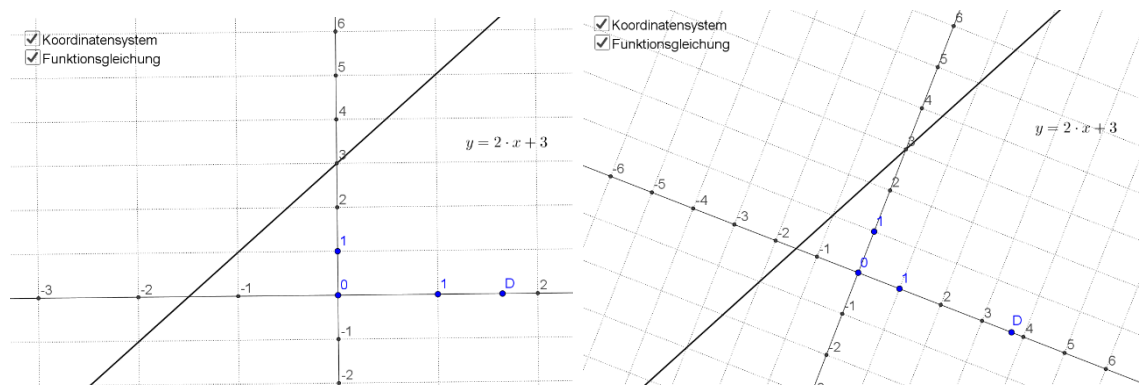


Abb. 3: Beispiellösungen a) durch Streckung der x-Achse b) durch Drehung des Koordinatensystems und jeweiliger Verschiebung.

Eine bereits oben genannte typische Aufgabe zu linearen Funktionen ist es, zu einer gegebenen Funktionsgleichung den Funktionsgraphen in ein Koordinatensystem einzuzichnen. Hier kann beispielsweise die Ausgangssituation variiert werden: Anstelle des Koordinatensystems ist eine Gerade vorgegeben. Zu dieser soll nun das Koordinatensystem so angepasst werden,

dass die Gerade einer bestimmten Funktionsgleichung entspricht (vgl. Herget 2017, S. 9). Das Koordinatensystem kann dabei gestreckt, gestaucht, gedreht und als Ganzes verschoben werden (vgl. Günster 2017). Diese Operationen können als weitere Variation (*Zelle Operationen – Objekt*) eingeschränkt werden. So ist es zum Beispiel möglich, das Koordinatensystem nur durch Drehen und Verschieben entsprechend einzustellen (siehe Abb. 3 b).

3. Ausblick Studie

Im Rahmen einer begleitenden Studie in 8. Klassen verschiedener bayrischer Gymnasien soll der Einfluss von Aufgaben, wie etwa die eben vorgestellten, im Tablet-unterstützten Unterricht untersucht werden. Dazu wird unter anderem durch einen auf bereits bestehenden Tests basierendem Fragebogen das funktionale Denken zu Beginn und Ende des Schuljahrs abgefragt. Als Ausblick werden erste Ergebnisse der Pilotierung bzgl. einer Aufgabenstellung vorgestellt:

Es ist die Situation gegeben, dass ein Schiff mit gleichbleibender Geschwindigkeit geradlinig an einem Leuchtturm vorbeifährt. Weiterhin ist gegeben, wie lange das Schiff bis zu einer bestimmten Stelle benötigt. Als Antwortmöglichkeiten sind vier verschiedene Graphen gegeben, die den Abstand zum Leuchtturm in Abhängigkeit der Fahrtzeit darstellen (vgl. IQB HU-Berlin 2011). Als zweiter Schritt soll für einen der Graphen begründet werden, warum dieser den Zusammenhang *nicht* darstellt: Tendenziell argumentierten die Schülerinnen und Schüler, die ein Schuljahr mit dem Tablet gearbeitet hatten, öfter dynamisch – also mit der Bewegung des Schiffs – als jene, die ohne digitale Werkzeuge gearbeitet hatten. Außerdem nutzten sie öfter Begründungen, die dem Kovariations- oder dem Objektaspekt zuzuordnen sind, während Schülerinnen und Schüler aus traditionellen Klassen sich präferiert des Zuordnungsaspekts bedienten. Es bleibt allerdings abzuwarten, ob sich diese Beobachtungen in der Hauptstudie ebenfalls wiederfinden.

Literaturverzeichnis

- Günster, Stephan (2017): Die Bedeutung des operativen Prinzips für die Entwicklung funktionalen Denkens im Tablet-unterstützten Unterricht. In: *Beiträge zum Mathematikunterricht 2017*, S. 345–348.
- Herget, Wilfried (2017): Aufgaben formulieren (lassen). Weglassen und Weg lassen – das ist (k)eine Kunst. In: *Mathematik Lehren 200*, S. 7–10.
- IQB (2011): Vera 8 Mathematik. Berlin: Humboldt-Universität.
- Vollrath, Hans-Joachim (1989): Funktionales Denken. In: *Journal für Mathematik-Didaktik* 10 (1), S. 3–37.
- Wittmann, Erich Christian (1985): Objekte-Operationen-Wirkungen: Das operative Prinzip in der Mathematikdidaktik. In: *Mathematik Lehren 11*, S. 7–11.