Kristina HÄHN, Christian RÜTTEN, Petra SCHERER &
Stephanie WESKAMP, Essen

Lernumgebungen für alle – Die Fibonacci-Folge natürlich differenzierend erkunden

1. Das Lehr-Lern-Labor ‚Mathe-Spürnasen'

Im Projekt ‚Mathe-Spürnasen' (vgl. Rütten et al., i. Vb.) werden u. a. Lernumgebungen (für Klasse 4) entwickelt, die im Sinne natürlicher Differenzierung vielfältige Zugänge und Strategien ermöglichen, um in besonderer Weise einer heterogenen Schülerschaft gerecht zu werden (vgl. Krauthausen & Scherer, 2014). Die mathematischen Aktivitäten beinhalten sowohl Hands-on- als auch Minds-on-Aktivitäten, wodurch ein nachhaltiges Lernen ermöglicht werden soll (vgl. Beutelspacher, 2017). Dabei wird ein mathematisch substanzielles Thema unter vielfältigen Perspektiven angeboten, was den Lernenden die Möglichkeit der Vernetzung und anschlussfähiger Lernprozesse eröffnet (vgl. Rütten et al., i. Vb.). Bislang wurden die Themen Fibonacci-Folge, Kreis, Pascal'sches Dreieck, Platonische Körper, Quadrat, Würfel entwickelt und erprobt. Die Aufbereitung eines Themas sieht für jede Lernumgebung jeweils die Konzeption einer Einführung und drei Vertiefungen vor. Diese können selbst auch als Lernumgebungen, sozusagen als ‚Lernumgebungen innerhalb einer Lernumgebung' betrachtet werden (vgl. ebd.). Als Element praxisorientierter Lehrerbildung führen u. a. Lehramtsstudierende diese Lernumgebungen im Lehr-Lern-Labor der Universität mit Kleingruppen von Grundschulklassen durch. Insgesamt soll somit die Förderung des Interesses und der Motivation von Lernenden – Schülerinnen und Schülern sowie Studierenden – angestrebt werden (ebd.).

2. Fachdidaktische Entwicklungsforschung

Die Entwicklung und Erforschung der Lernumgebungen erfolgt im Rahmen eines Design-Research-Ansatzes (vgl. z. B. TDBRC, 2003). Ausgangspunkt der Lernumgebungskonstruktion ist die mathematische Substanz eines Themas (vgl. Wittmann, 1995). Nach der Auswahl eines mathematischen Inhalts werden Aufgabenumsetzungen aus der Literatur gesichtet und analysiert, Überlegungen zu Aufgabenadaptionen auf Grundschulniveau getroffen oder neue Aufgaben entwickelt (vgl. Rütten et al., i. Vb.). Es folgt das konkrete Design der Lernumgebung mit Einführung und entsprechenden Vertiefungen. Im Fokus des sich fortsetzenden Entwicklungsprozesses steht der mathematische Lerngegenstand. Der iterative Zyklus umfasst die Erprobung der konzipierten Lernumgebung im Lehr-Lern-Labor, die Analyse empirischer Daten (u. a. qualitative Inhaltsanalyse der Video-/Schülerdokumente, Dokumentation teilnehmender Beobachtung),

In Fachgruppe Didaktik der Mathematik der Universität Paderborn (Hrsg.) Beiträge zum Mathematikunterricht 2018. Münster: WTM-Verlag

die Entwicklung lokaler Theorien (bspw. bzgl. der Designprinzipien, Zugänglichkeit zur Problemstellung, Material, Strategieentwicklung) sowie die Weiterentwicklung der Lernumgebung (vgl. TDBRC, 2003). Im Folgenden wird der Design-Prozess für die kombinatorische Vertiefung der Lernumgebung ‚Fibonacci-Folge' exemplarisch konkretisiert.

3. Entwicklung der kombinatorischen Vertiefung ‚Fibonacci-Folge'

In einer einführenden Einheit der Lernumgebung ‚Fibonacci-Folge' erfolgt die Konstruktion der Folge durch die gemeinsame Bearbeitung des berühmten Kaninchen-Problems. Die drei Vertiefungen fokussieren auf die Inhaltsbereiche Arithmetik (Zahlenketten mit vorgegebener Zielzahl), Geometrie (Identifikation der Goldenen Spirale in spiralförmigen Figuren aus der Umwelt; vgl. Rütten et al., i. Vb.) sowie Kombinatorik (Türme bauen aus gelben und blauen Legosteinen, wobei blaue Steine niemals direkt übereinander gesetzt werden dürfen; vgl. Rütten & Weskamp, 2015).

Die kombinatorische Lernumgebung hat die Entwicklung des strategischen Denkens, die Förderung der Argumentations- und Kommunikationsfähigkeit und die Möglichkeit der Nutzung verschiedener Repräsentationen zur Problemlösung zum Ziel. Der Fokus beim Design liegt daher u. a. besonders auf der Strategieentwicklung und -darstellung. Dabei soll dem Design-Prinzip der natürlichen Differenzierung entsprechend allen Lernenden eine aktiv-entdeckende Auseinandersetzung mit kombinatorischen Problemstellungen ermöglicht werden.

Leitend für die Entwicklung lokaler Theorien ist die Analyse von Strukturierungs- und Zählstrategien in ihrer Interdependenz (vgl. Lockwood, 2013; Rütten & Weskamp, 2015). English (1996) unterscheidet hinsichtlich der Strategieentwicklung drei Stufen: unplanmäßiges, von Versuch und Irrtum geprägtes Vorgehen (*nonplanning stage*), Strukturierungen nutzende Zugänge (*transitional stage*) sowie durch Strukturierung verallgemeinerbare Zählstrategie eröffnende und damit effizienteste Problemlösungen (*final stage*). Um Strategieentwicklungen aus Schülerdokumenten und videographierten Unterrichtssequenzen zu rekonstruieren, wurde die Unterscheidung zwischen Mikro- und Makrostrategien von Hoffmann (2003) hinzugezogen. Mikrostrategien lassen sich auf Englishs *transitional stage* verorten, da zwar Strukturierungen genutzt werden, diese aber lediglich zum Generieren einer oder weniger weiterer Möglichkeiten führen. Makrostrategien dagegen sind effizienter, da sie potenziell alle Möglichkeiten generieren können. Dabei lassen sich Strukturierungen unterscheiden, die lediglich das Potenzial der Erzeugung aller Möglichkeiten besitzen und solchen, die zwingend alle Möglichkeiten erzeugen und oft eine Zählstrategie nahelegen. Zudem lassen sich Perspektiven der Strukturierung unterscheiden:

Unter horizontaler Perspektive werden Möglichkeiten der gleichen Dimension gefunden, unter vertikaler Perspektive werden Strukturierungen im Sinne rekursiver Beziehungen zwischen Möglichkeiten unterschiedlicher Dimensionen vorgenommen (vgl. Rütten & Weskamp, 2015).

Für kombinatorische Lernumgebungen zur Fibonacci-Folge finden sich in der Literatur einige Ideen (z. B. Rényi, 1982). An einen Vorschlag (vgl. Böttinger, 2006) anknüpfend, wurde im Projekt die kombinatorische Vertiefung ‚Wege legen' entwickelt (Platten mit Kanten im Verhältnis 2:1; Wegbreite 2; Rechtecke ohne Löcher). Beim ‚Wege legen' ließ sich aus den Daten der Durchführungen lediglich eine Strategie rekonstruieren. In den ersten beiden Zyklen waren keine weiteren Strategien oder Strategiekeime bei den Lernenden rekonstruierbar. Vielmehr schien ihr Vorgehen eher durch Versuch und Irrtum geprägt. So wurde ab dem dritten Zyklus das ‚Wege legen' durch das isomorphe Problem ‚Türme bauen' (s. o.) ersetzt.

Bisherige Erprobungen des ‚Türme bauen' zeigten ein anderes Bild: Einige Lernende nutzten unter horizontaler Perspektive die Mikrostrategien ‚Umwendung' und ‚Gegenpaarbildung'.‚Treppenmuster' war die häufigste Strategie unter horizontaler Perspektive. Dabei wurde dieses Muster von Lernenden z. T. im Sinne vertikaler Strukturierung von Türmen aus drei auf Türme aus vier Steinen übertragen. Ebenfalls unter vertikaler Perspektive wurden aus 3-steinigen Türmen analoge Türme aus vier Steinen gebaut, wobei weniger effizient als die Musterübertragung jeweils nur ein weiterer Turm der nachfolgenden Höhe generiert wird.

Besonders effizient strukturierten die Lernenden, die einen Stein an gefundene Türme anbauten, so dass Türme der nächsten Höhe entstanden. Wurde so je ein blauer oder ein gelber Stein angebaut, wurden alle gesuchten Türme sowie einige nicht-regelkonforme Türme mit zwei blauen Schlusssteinen gefunden. Nach deren Streichung ergab sich die gesuchte Anzahl. Dieses Vorgehen wurde auch bei Studierenden beobachtet und eröffnete ihnen sogar die Möglichkeit, einen Ansatz für eine verallgemeinerbare Zählstrategie abzuleiten.

Lediglich aufgrund der Anzahlen, nicht der vorgenommenen Strukturierungen, entwickelten die Grundschulkinder Hypothesen zu Zählstrategien. Sie wurden explizit dazu herausgefordert, indem sie die Anzahl der Türme aus 5 Steinen ohne Auflistung aller möglichen Türme nennen sollten. Dabei entdeckten Lernende unterschiedliche arithmetische Muster (z. B. +1, +2, +3, +4). Einige Lernende entdeckten aber auch die strukturelle Ähnlichkeit der Anzahlen mit den Zahlen der Fibonacci-Folge und nutzten diese zur Hypothesenbildung bzgl. der Anzahl von Türmen aus fünf Steinen. Daher wird in aktuellen Erprobungen versucht, strukturierungsbezogene Argumentationen bzgl. der Zählstrategie deutlicher im Reflexionsgespräch herauszufordern.

4. Fazit und Perspektiven

Als zentrale Erkenntnis im Entwicklungsprozess der Lernumgebung ‚Fibonacci-Folge' konnte gezeigt werden, dass sich in der Lernumgebung ‚Türme bauen' vielfältige Strategien rekonstruieren lassen, wohingegen beim ‚Wege legen' kaum strategisches Vorgehen rekonstruierbar war. Im Sinne einer lokalen Theorie scheint die Lernumgebung ‚Türme bauen' eine die horizontale Heterogenität berücksichtigende Förderung der Strategieentwicklung besser zu realisieren als die Lernumgebung ‚Wege legen'. Im Hinblick auf den weiteren Design-Research-Prozess sind neben der Förderung strukturierungsbezogener Argumentationen weitere Perspektiven angedacht, z. B. Re-Design der Lernumgebung ‚Wege legen', um weitere Strategieentwicklungen zu unterstützen oder Design des isomorphen Problems zum Bauen von Türmen aus würfel- und quaderförmigen Steinen. Schließlich sollen zu den verschiedenen Lernumgebungen auch Überlegungen zu inklusiven Settings angestellt werden.

Literatur

Beutelspacher, A. (2017). Mathematische Experimente und ihr Potenzial für Grundschulkinder. *Grundschulunterricht, 64*(2), 4-9.

Böttinger, C. (2006). Aufgaben für begabte Schüler. Modelle für die Fibonacci-Zahlen. *Grundschulunterricht, 53*(2), 44–46.

English, L. D. (1996). Children's Construction of Mathematical Knowledge in Solving Novel Isomorphic Problems in Concrete and Written Form. *The Journal of Mathematical Behavior, 15*(1), 81–112.

Hoffmann, A. (2003). *Elementare Bausteine der kombinatorischen Problemlösefähigkeit*. Hildesheim: Franzbecker.

Krauthausen, G. & Scherer, P. (2014). *Natürliche Differenzierung im Mathematikunterricht. Konzepte und Praxisbeispiele aus der Grundschule*. Seelze: Klett Kallmeyer.

Lockwood, E. (2013). A model of students' combinatorial thinking. *The Journal of Mathematical Behavior, 32*(2), 251–265.

Rényi, A. (1982). *Tagebuch über die Informationstheorie*. Basel: Birkhäuser.

Rütten, C. & Weskamp, S. (2015). Türme bauen – Eine kombinatorische Lernumgebung für Grundschulkinder und Lehramtsstudierende. In F. Caluori et al. (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht, 2015* (Bd. 2, S. 772–775). Münster: WTM.

Rütten, C., Scherer, P. & Weskamp, S. (i. Vb.). Entwicklungsforschung im Lehr-Lern-Labor – Lernangebote für heterogene Lerngruppen am Beispiel der Fibonacci-Folge.

TDBRC – The Design-Based Research Collective (2003). Design-Based Research: An Emerging Paradigm for Educational Inquiry. *Educational Researcher, 32*(1), 5-8.

Wittmann, E. C. (1995). Mathematics education as a 'design science'. *Educational Studies in Mathematics, 29*(4), 355-374.