

## **Fachdidaktisches Wissen zu Funktionen**

Es gibt viele unterschiedliche Anforderungen an Mathematiklehrkräfte, die sie bei der Planung, Durchführung und Reflexion von Unterricht bewältigen müssen. Diese sind beispielsweise die Bewertung und Diagnose von Schülerleistungen, die Themen- und Methodenauswahl sowie Erklärung mathematischer Inhalte. Zur Bewältigung benötigen die Lehrkräfte professionelle Kompetenz. Ein Teil dieser ist das professionsbezogene Wissen (u. a. Baumert & Kunter, 2011). Es enthält unter anderem das fachdidaktische Wissen, das in dieser Studie zum Thema Funktionen untersucht worden ist.

### **Theoretischer Rahmen**

Wesentliche Subfacetten des fachdidaktischen Wissens sind das Wissen über Schülervorstellungen und -schwierigkeiten (Wissen über die Schüler) sowie über Unterrichtsansätze und Darstellungen (Wissen über das Lehren), (Depaepe, Verschaffel & Kelchtermans, 2013). Diese beiden finden sich auch in dem Modell von COACTIV mit „Erklärungswissen“ und „Wissen über das mathematische Denken von Schüler(inne)n“ (Baumert & Kunter, 2011). Diese werden unter anderem in dieser Studie betrachtet.

Das fachdidaktische Wissen wird insgesamt durch die beiden Facetten modelliert. Dabei wird das Wissen über die Schüler als solches über Schülerschwierigkeiten, -vorstellungen und -fehlvorstellungen sowie Diagnose der Schülervorstellungen verstanden. Das Wissen zum Lehren wird als solches über unterschiedliche Darstellungen, Erklärungen, Grundvorstellungen und Sachkontexte zu mathematischen Inhalten festgelegt. Diese Subfacetten werden anhand des fachdidaktischen Wissens zu Funktionen inhaltlich erläutert, wobei sich dies auf die studienrelevanten Aspekte beschränkt.

Schülern fällt es schwer, Graphen als Funktionen zu identifizieren, wenn Unstetigkeitsstellen oder „Knicke“ (beispielsweise Betragsfunktionen) vorhanden sind. Zudem erkennen sie eine Parallele zur x-Achse (konstante Funktion) eher nicht als Graph einer Funktion an. Des Weiteren bevorzugen sie die algebraische Darstellung (Kösters, 1996). Werden grafische Darstellungen als Übersetzung einer Situation gefordert, dann kann es zum Graph-als-Bild-Fehler kommen, bei dem der Lernende den Graphen sehr ähnlich bzw. identisch zur Ausgangssituation wählt bzw. zeichnet. Beispielsweise werden Geschwindigkeitsverlaufsgraphen gewählt, die der Skipiste in der Situation entsprechen.

Beim Wechsel vom Graph zur Funktionsgleichung einer linearen Funktionen erwähnt Nitsch (2015) als mögliche Fehler die Vertauschung der Parameter Steigung und y-Achsenabschnitt, Vertauschung von Zähler und Nenner in der Steigungsformel und das Einsetzen des x-Achsenabschnitts für die Steigung.

Bezüglich des Wissens zum Lehren sind die unterschiedlichen Darstellungsformen, wie Tabelle, Graph, verbal, usw. betrachtet worden (Greefrath, Oldenburg, Siller, Ulm & Weigand, 2016). Dazu sind die Grundvorstellungen „Zuordnungs-“, „Kovariations-“ und „Objektaspekt“ (Vollrath, 1989) Teil der Untersuchung. Bezüglich der Sachkontexte sind solche zu Exponentialfunktionen wie Populationswachstum, u. ä. fokussiert worden.

Auf der Schülerseite weiß man viel über Fehlvorstellungen zu Funktionen. Inwiefern Lehrkräfte Wissen über besitzen, haben Hadjidemetriou und Williams (2002) in ihrer Studie anhand von zwölf Mathematiklehrkräften mit Tests und semi-strukturierten Interviews untersucht. Dabei haben sie herausgefunden, dass „teacher knowledge of the [...] different misconceptions varies dramatically, with the half of the teachers mentioning only one or two of them, and two of the teachers mentioning all but one of them“ (ebd., S. 62). Insgesamt wird folgende Forschungsfrage untersucht:

Welches fachdidaktische Wissen zu Funktionen haben Lehrkräfte zu Beginn von Lehrerfortbildungen?

## **Methode**

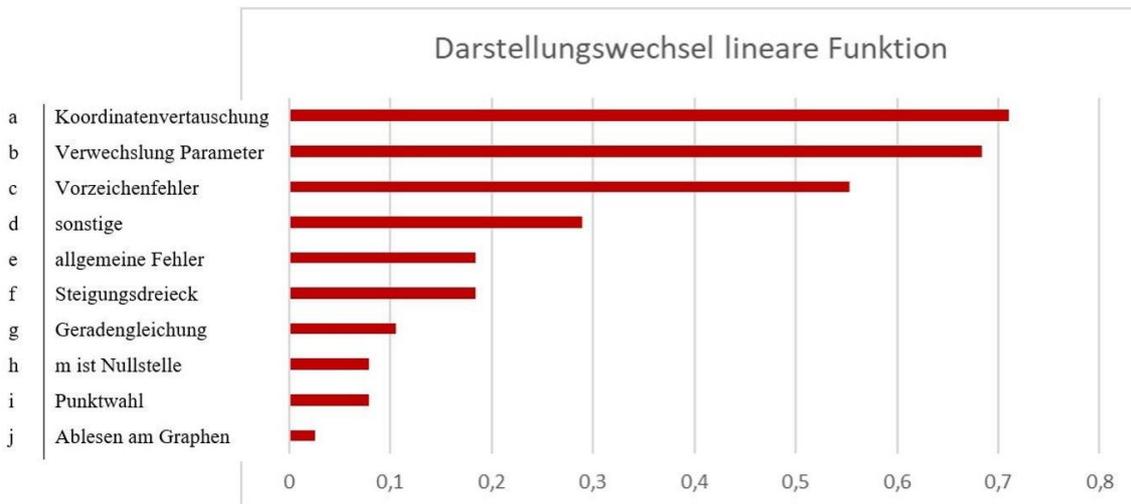
Die Daten stammen aus einem größeren Projekt, das die Entwicklung der professionellen Kompetenz in Lehrerfortbildungen untersucht. Das Wissen ist anhand von acht offen gestellten Items getestet worden, wobei jeweils vier das Wissen zu Schülern und vier das Wissen zum Lehren erfassen.

Die 38 befragten Lehrkräfte stammen aus dem gesamten Gebiet von Sachsen-Anhalt, sind im Schnitt 48 Jahre alt und haben 23 Jahre Lehrerfahrung in Jahren nach dem Vorbereitungsdienst.

Die von den Lehrkräften ausgefüllten Items sind mittels der Inhaltsanalyse durch deduktive und induktive Codes (Mayring, 2015) von zwei Kodierern mit guter Übereinstimmung (Cohens Kappa > 0.8) ausgewertet worden.

## **Ergebnisse**

An dieser Stelle werden beispielhaft die inhaltlichen Ergebnisse zum Wissen über Schülerfehler beim Darstellungswechsel „Graph → Funktionsgleichung“ einer linearen Funktion (vgl. Abbildung 1) und insgesamt die quantitativen Ausprägungen aller acht Items (Tabelle 1) betrachtet.



**Abb. 1:** Verteilung genannter Schülerfehler

Stellvertretend zeigen die Anteile der Kategorien von Schülerfehlern, dass es einige gibt, die häufiger genannt werden (Parameterverwechslung) als es bei anderen (m als Nullstelle) der Fall ist. Eine solche Verteilung findet sich bei allen acht Items. Es finden sich hier die von Nitsch (2015) gefundenen Fehler der Vertauschung von Parametern, der Vertauschung von Zähler und Nenner bei der Steigungsformel (Koordinatenvertauschung) und m als Nullstelle, wobei der letztgenannte von kaum einer Lehrkraft angegeben worden ist.

	Kategorienzahl	M	SD
<i>Wissen zu Schülern</i>			
Graphen	3	1.87	0.96
Darstellungswechsel lineare Funktion	9	2.61	0.86
Graph-als-Bild-Fehler	2	1.05	0.70
Schwierigkeiten Exponentialfunktion	7	2.37	0.85
<i>Wissen zum Lehren</i>			
Erklärungswissen Funktion	11	2.61	1.42
Erklärungen Parabelverschiebung	8	1.50	0.92
Darstellungsformen von Funktionen	6	3.92	0.71
Sachkontexte Exponentialfunktion	19	4.08	1.87

**Tab. 1:** Mittelwert und Standardabweichung fachdidaktisches Wissen bezüglich der Anzahl an unterschiedlich genannten Kategorien

Neben der inhaltlichen Heterogenität zeigt sich diese ebenfalls in den quantitativen Ausprägungen (Tabelle 1). Dort sind die im Mittel genannten unterschiedlichen Antworten im Vergleich zur möglichen Kategorienzahl gering. Die Standardabweichungen, die mit bis ca. 2 Kategorien groß sind, zeigen ebenfalls große Unterschiede zwischen den befragten Lehrkräften.

## Diskussion

Die Ergebnisse des fachdidaktischen Wissens der befragten Lehrkräfte variiert wie bei Hadjidemetriou und Williams (2002) sehr stark, wobei dies sowohl auf das Wissen zu Schülern als auch das zum Lehren zutrifft. Dies ist sowohl inhaltlich als auch quantitativ der Fall, sodass die Ergebnisse der Autoren anhand einer größeren Stichprobe repliziert werden konnten.

Auf der Basis der Ergebnisse stellt sich nun die Frage, inwiefern diese Heterogenität ebenfalls in anderen Themengebieten zu finden ist. Dementsprechend sind weitere Studien zur Erforschung notwendig.

## Literaturverzeichnis

- Baumert, J., & Kunter, M. (2011). Das Kompetenzmodell von COACTIV. In M. Kunter, J. Baumert, W. Blum, U. Klusmann, S. Krauss, & M. Neubrand (Eds.), *Professionelle Kompetenz von Lehrkräften. Ergebnisse des Forschungsprogramms COACTIV* (pp. 29–53). Münster, München [u.a.]: Waxmann.
- Depaepe, F., Verschaffel, L., & Kelchtermans, G. (2013). Pedagogical content knowledge: A systematic review of the way in which the concept has pervaded mathematics educational research. *Teaching and Teacher Education*, *34*, 12–25. doi:10.1016/j.tate.2013.03.001
- Greefrath, G., Oldenburg, R., Siller, H.-S., Ulm, V., & Weigand, H.-G. (2016). *Didaktik der Analysis*. Berlin, Heidelberg: Springer.
- Hadjidemetriou, C., & Williams, J. (2002). Teachers' pedagogical content knowledge: graphs from a cognitivist to a situated perspective. In A. D. Cockburn, & E. Nardi (Eds.), *Proceedings of the 26th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*. (Vol. 3, pp. 57–64). Norwich, U.K.: School of Education and Professional Development, University of East Anglia.
- Kösters, C. (1996). Was stellen sich Schüler unter Funktionen vor? *Mathematik lehren*. (75), 9–13.
- Mayring, P. (2015). *Qualitative Inhaltsanalyse: Grundlagen und Techniken* (12., vollständig überarbeitete und aktualisierte Aufl.). Weinheim: Beltz, Juventa
- Nitsch, R. (2015). *Diagnose von Lernschwierigkeiten im Bereich funktionaler Zusammenhänge: Eine Studie zu typischen Fehlermustern bei Darstellungswechseln*. Wiesbaden: Springer Spektrum.
- Vollrath, H.-J. (1989). Funktionales Denken. *Journal für Mathematik-Didaktik*, *10*(1), 3–37. doi:10.1007/BF03338719