Dörte HAFTENDORN, Lüneburg

Keine Straße ohne Klothoide, Anwendungen von Kurven in unserer Welt

Die Lehre von Mathematik sollte einen „Weltbezug“ nicht außer Acht lassen. Das ist wohl unbestritten, allerdings gehen die mathematischen Inhalte solcher Bezüge zumeist nicht über das vorgeschriebene Curriculum hinaus. Das ist schade und auch m. E. zu eng gesehen. Bis in die 60er Jahre war das Thema „Kurven“ – zumindest die Kegelschnitte – in der Mathematiklehre selbstverständlich. Hans Schupp (1995), Thomas Weth, Jörg Meyer u.a. haben um die Jahrtausendwende diese Tradition unter Einsatz von Computern aufgegriffen. Mit dem Buch „Kurven erkunden und verstehen“ (2017) hat die Autorin ein Grundlagenwerk vorgelegt, das unter Einsatz von GeoGebra versucht, eigenständiges Erkunden zu betonen und dabei vielfältiges mathematisches „Handwerkszeug“ zu lernen. An diesem „nicht-curricularen“ Thema können Lernende in Schule und Hochschule den **Impuls entwickeln**, Terme umzuformen, Gleichungen zu lösen, Parameter zu eliminieren, Darstellungsarten zu wechseln, geometrisch, algebraisch und analytisch zu beweisen, schlüssig zu argumentieren und viele weitere mathematische Kompetenzen zu üben und zu lernen.

Dieses geht im Kurventhema leichter als in Gebieten mit ausgefeilter Theorie wie Analysis oder Linearer Algebra, weil einzelne Kurvenfamilien quasi ein Universum für sich bilden und es gar nicht nötig ist, sehr viele Kurven zu kennen. Dieser Umstand begünstigt auch eigenständige Untersuchungen seitens der Lernenden in Seminar- oder Facharbeiten.

In dem vorliegenden Aufsatz geht es – entsprechend dem Oberthema der Tagung - um Zusammenhänge in „der Welt“, fokussiert auf die Klothoide, die für die Trassierung von Straßen unerlässlich ist, einige mechanische Gelenke und die Verwendung von Hyperbeln als Dachform. Um dem „Schnittstellenanspruch“ gerecht zu werden, werden auch die zugehörigen Beweise geführt bzw. auf der zum genannten Buch gehörigen Website http://www.kurven-erkunden-und-verstehen.de (bei Vorträgen) dargestellt. Insbesondere wird bei den Hyperbeln das interaktive Vorgehen mit GeoGebra verglichen mit dem Standardverfahren der Hauptachsentransformation.

Klothoide

Bei der Spielzeugeisenbahn gibt es gerade Schienen und solche, die ein Achtelkreisbogen aus ein- und demselben Kreis sind. Im Straßenverkehr ist es nicht möglich, an ein gerades Straßenstück ein kreisbogenförmiges

In Fachgruppe Didaktik der Mathematik der Universität Paderborn (Hrsg.)
Beiträge zum Mathematikunterricht 2018. Münster: WTM-Verlag

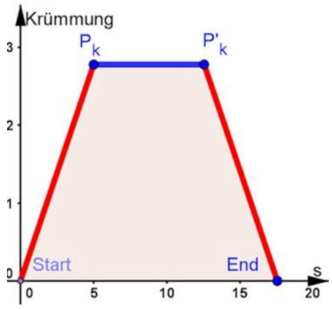

Abb. 1: Krümmungsverlauf mit Klothoide

unvermittelt anzuschließen. Letzteres hat eine konstante Krümmung, und zwar $\frac{1}{R}$, wenn R der Kreisradius ist. Es müsste also das Lenkrad von der Geradeausstellung mit Krümmung 0 auf die Kreiskrümmung herumgerissen werden. Der einfachste Ansatz, einen solchen Krümmungssprung zu vermeiden, ist es, im Krümmungsverlauf eine lineare „Flanke“ einzufügen, wie es Abb. 1 zeigt. Genau das gelingt mit der Klothoide, denn sie hat in Abhängigkeit von der Weglänge s die Krümmungsgleichung $\kappa = c\,s$ mit einer Konstanten c. Da die Krümmung allgemein definiert ist als die Ableitung des von s abhängigen Tangentenwinkels α nach s, gilt $d\alpha = \kappa(s)ds = c\,s\,ds$ und daher für die Klothoide $\alpha = \frac{1}{2}c\,s^2$, wenn man $\alpha(0) = 0$ wählt. Im kartesischen Koordinatensystem gilt $dx = \cos(\alpha)\,ds$ und $dy = \sin(\alpha)\,ds$ und damit

$$x(s) = \int_0^s \cos\left(\tfrac{1}{2}t^2\right)\mathrm{dt},\ y(s) = \int_0^s \sin\left(\tfrac{1}{2}t^2\right)\mathrm{dt}$$

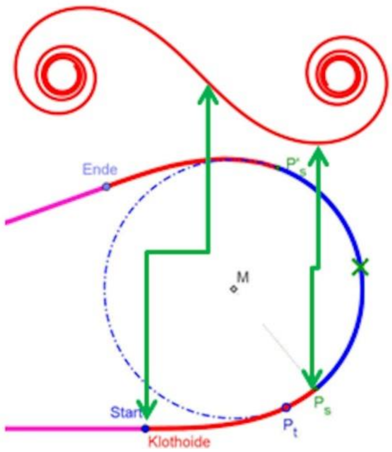

Abb. 2: Klothoide als Kurve und Verwendung mit Geraden und Kreis

für die Parameterdarstellung der Klothoide. Diese Integrale sind nicht geschlossen lösbar, werden aber von Computersystemen wie GeoGebra numerisch für jeden Wert von s ausgewertet. Die gesamte Klothoide kann man nicht darstellen, denn ihr Graph rollt sich punktsymmetrisch zum Ursprung beliebig eng ein. Man verwendet für das in Abb. 2 gezeigte Trassierungsproblem vom Wendepunkt aus ein Klothoidenstück, das mit der Krümmung des anzuschließenden Kreisbogens endet.

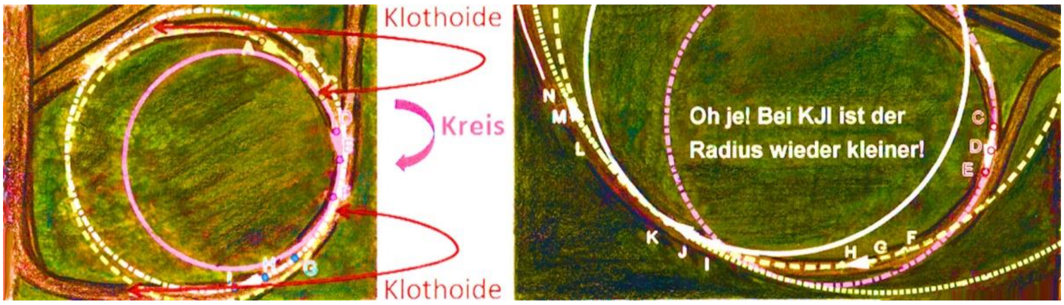

Abb. 3: Straßenabzweigungen, Eintrag verschieden großer Kreise, rechts ein Baufehler

Durch Eintrag von Kreisen mit GeoGebra kann man die lokal gültigen Krümmungskreise annähernd zeigen. In Abb. 3 ist links ein gestrichelter Kreis aus dem ersten Klothoidenstück, dann der engste Kreis, anschließend mit Strichpunkt ein Kreis aus der zweiten Klothoide eingetragen. Im rechten Bild dagegen ist die Ausfahrt aus dem gestrichpunkteten engsten Kreis zum gestrichelten Krümmungskreis HGF gezeigt, dann aber folgt fatalerweise ein durchgezogener engerer Kreis KJI, in dem der Autofahrer nochmals einlenken muss, bis er dann mit nachlassender Krümmung über den gepunkteten Kreis NML in die Gerade fahren kann. Jeder, der dieses Straßenstück befährt, kann den Baufehler bemerken.

Mechanische Gelenke

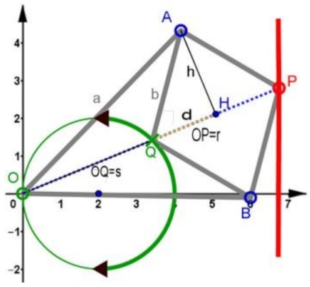

Abb. 4: Inversor von Peaucellier

Im 19. Jahrhundert wurden viele technische Probleme mechanisch gelöst. Ein solches ist die „Geradführung“, bei der man die Bewegung auf einem Kreisbogen in eine Bewegung auf einer Geraden überführen wollte oder umgekehrt. Lange glaubte man, dass dies nur näherungsweise ginge, bis Peaucellier 1864 den nach ihm benannten *Inversor* erfand. Zwei Stangen der Länge a sind verbunden mit diagonalen Ecken einer Raute mit Kantenlänge b, wie es Abb. 4 zeigt. Bewegt sich Punkt Q auf einem Kreisbogen, ist der geometrische Ort von P eine exakte Gerade. Zum Beweis multiplizieren wir die Polarradien s und r dieser Punkte. Wenn das Produkt konstant ist, dann sind sie gegenseitig Bilder bei einer Inversion an einem Kreis um O.

$$r \cdot s = (s+2d)s = s^2 + 2ds + d^2 - d^2 = (s+d)^2 - d^2 = a^2 - h^2 - b^2 + h^2 = a^2 - b^2 =: k^2$$

Der elementargeometrische Beweis verwendet etwas Algebra und den Satz des Pythagoras. Dabei ist k der Radius des Inversionskreises. Da bei der Kreisspiegelung Kreise durch den Ursprung auf Geraden abgebildet werden, ist der Ort von P tatsächlich eine Gerade.

Im Vortrag wurden als weitere Gelenke die Watt’sche Lemniskaten-Anlenkung und zwei Realisierungen der Kempe’schen Drachen gezeigt. Sie finden diese auf der oben genannten Website.

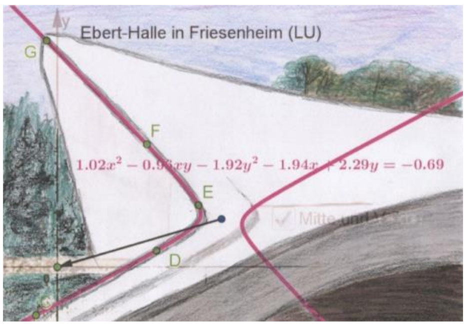

Abb. 5: Dachform als Hyperbel

Abb. 5 zeigt die Friedrich-Ebert-Halle in Ludwigshafen-Friesenheim. Die Dachform in der Zeichnung ist eine Hyperbel, wie man durch das Setzen von fünf Punkten auf den Rand und das GeoGebra-Werkzeug „Kegelschnitt aus fünf Punkten“ sehen kann. Zentralprojektionen von Hyperbeln sind wieder Hyperbeln, daher ist der wahre Dachrand, sofern er überhaupt in einer

Ebene liegt, auch eine Hyperbel. Darauf soll es hier aber nicht ankommen. Die nachfolgende Aufgabe könnte in der Linearen Algebra/Analytischen Geometrie verortet sein, in der üblicherweise auch die Hauptachsentransformation gelehrt wird. Es wird vorgeschlagen, die Hyperbel zunächst interaktiv zu verschieben und zu drehen, um sie in Hauptachsenlage zu bringen. Das Ergebnis soll mit dem Vorgehen der Hauptachsentransformation verglichen werden, bei der mit der aus den Eigenvektoren konstruierten Matrix um den Ursprung gedreht wird. Die Verschiebung erfolgt dort zum Schluss. Inwieweit man die Schritte nachrechnen lässt, entscheidet man lernzielgemäß. Jedenfalls liefert GeoGebra bei mathematisch korrektem Vorgehen ohne weiteres Zutun die passenden Gleichungen. Letztlich kann auch die Hyperbelgleichung in schulüblicher Lage interaktiv gefunden werden. Das Betrachten aus mehreren Perspektiven und Verwenden anderer Werkzeuge kann Verständnis und Sicherheit im Umgang mit dem Thema erhöhen.

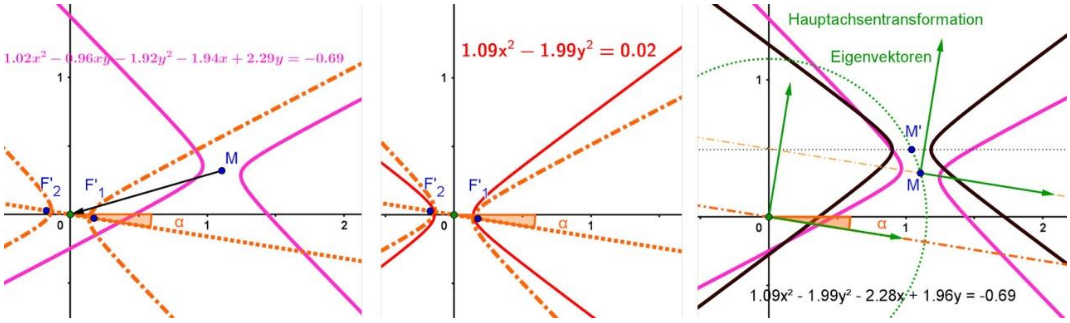

Abb. 6: Links und Mitte: Verschiebung in den Ursprung, Auffinden der Hauptachse durch die Brennpunkte, Drehung der Hauptachse und der Kurve in x-Achsen-Richtung. Rechts: Drehung der Eigenvektoren in die Richtung der Koordinatenachsen.

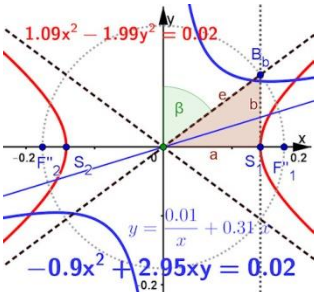

Abb. 7: Hyperbel mit senkrechter Asymptote

Aufgabe: Erzeugen Sie interaktiv die Mittelpunktsgleichung und eine Funktionsgleichung für diese Hyperbel. Vergleichen Sie mit der Hauptachsentransformation.

Bei der Lösung ist zu beachten, dass GeoGebra Buttons hat für „Brennpunkt“, „Mittelpunkt“, „Scheitel“ von Kegelschnitten. Allerdings muss man hier wissen, dass für Hyperbeln die Gleichung $a^2 + b^2 = e^2$ gilt. Damit konstruiert man die Asymptoten für die Mittelpunktslage und dreht eine davon in y-Achsenlage. Die Drehung geschieht durch den Drehungs-Button.

Literatur

Haftendorn, Dörte (2017). *Kurven erkunden und verstehen.* Heidelberg: Springer Spektrum