Anna M. HARTKOPF & Günter M. ZIEGLER, Berlin

Adoptiere ein Polyeder — Ein Citizen Art Projekt zur Wissenschaftskommunikation in Mathematik

1. Projektbeschreibung und Hintergrund

Das Projekt „Adoptiere ein Polyeder" ist eingebettet in das Teilprojekt „Communication and Presentation" im Sonderforschungsbereich „Discretization in Geometry and Dynamics". Es hat zum Ziel die öffentliche Wahrnehmung von Mathematik zu stärken.

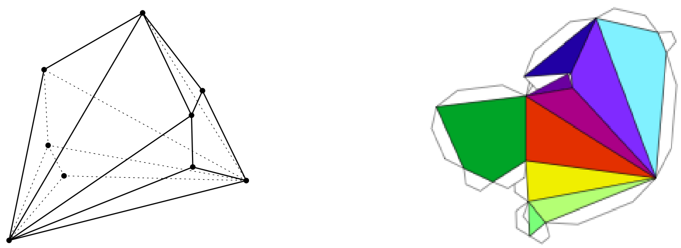

Abb. 1: a) Ein Polyeder mit 9 Ecken und b) ein Polyedernetz eines Polyeders mit 9 Ecken.

Die zentrale Idee des Projektes ist es, ein breites Publikum dafür zu gewinnen, in einer kollektiven Aktion durch den Bau eines Modells alle kombinatorischen Typen dreidimensionaler konvexer Polyeder zu realisieren. Da es unendlich viele verschiedene Typen gibt, kann dieses Vorhaben natürlich nicht abgeschlossen werden.

Um die Polyeder zugänglich zu machen, haben wir eine Webseite aufgesetzt, auf der die Polyeder nach der Anzahl ihrer Ecken sortiert und nach und nach zur Adoption freigegeben werden. Die Teilnehmerinnen und Teilnehmer können auf der Seite ein Polyeder adoptieren und ihm einen Namen geben.

Im nächsten Schritt geht es an die Realisierung des Polyeders: ein Modell wird gebaut. Dazu können mit dem Computer vorbereitete Polyedernetze ausgedruckt, ausgeschnitten und zusammengeklebt werden. Für Bastelmuffel stehen ebenfalls 3D-Druckerdaten zur Verfügung.

Wir ermuntern die Teilnehmerinnen und Teilnehmer im Anschluss daran ein eigenes Modell aus einem Material ihrer Wahl zu bauen. Dazu bieten sich neben klassischen Materialien zum Modellbau wie Gips, Holz, Draht oder Papier auch interessante andere Stoffe wie Ton, Knetgummi oder Strohhalme an.

Um die Realisierung jedes Polyeders zu dokumentieren, werden die fertiggestellten Modelle, sei es ein Papiermodell, ein 3D Druck oder ein freies kreatives Modell, fotografiert und das Foto wird auf die Webseite hochgeladen. So entsteht dort nach und nach neben den computergenerierten Visualisierungen der Polyeder auch eine Galerie von realen Modellen und ein kollektiver Beweis.

2. Mathematik und Modellbau

Polyeder sind klassische Objekte der Mathematik. Sie spielen im Curriculum deutscher weiterführender Schulen kaum eine Rolle. Ihre bekanntesten Vertreter sind die platonischen Körper. Den Beweis über die vollständige Klassifikation der regulären dreidimensionalen konvexen Polyeder führte Euklid bereits 300 v. Chr.

Ein konvexes dreidimensionales Polyeder hat Ecken, Kanten und als Seitenflächen ebene Polygone. Es hat keine Einbuchtungen oder Aushöhlungen. Alle inneren Winkel zwischen zwei benachbarten Seitenflächen und Kanten sind kleiner als 180°.

Um zwei Polyeder miteinander zu vergleichen, hilft das Konzept des „kombinatorischen Typs“. Zwei Polyeder heißen kombinatorisch äquivalent, wenn ihre Graphen isomorph sind, das bedeutet, dass sie dieselbe Struktur aufweisen. Kann man die Knoten in beiden Graphen so miteinander identifizieren, dass, wenn zwei Knoten im Graphen des ersten Polyeders mit einer Kante verbunden sind, es auch die entsprechenden Knoten im zweiten Graphen sind, so sind ihre Graphen isomorph.

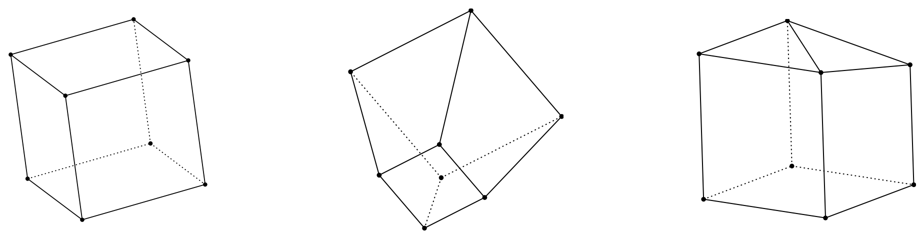

Abb. 2: a) Ein Würfel, b) ein kombinatorischer Würfel und c) ein 8-eckiges Polyeder mit einem anderen kombinatorischen Typ.

Das Polyeder, das mit großem Abstand am häufigsten realisiert wird, ist der Würfel. Er besteht aus 8 Ecken, 12 Kanten und 6 quadratischen Flächen. In jeder Ecke treffen drei Kanten und drei Flächen zusammen. Verändert man die Größe eines Würfels oder seine Position im Raum, so bleibt er immer ein Würfel. Betrachtet man die Figur in Abbildung 2b, so hat sich handelt es sich geometrisch nicht um einen Würfel, weil seine Seitenflächen nicht quadratisch sind. Die Figur ist jedoch kombinatorisch äquivalent mit dem Würfel, da die Inzidenzen zwischen seinen Ecken, Kanten und Flächen unverändert sind und es sich bei den Seitenflächen ebenfalls um Vierecke handelt.

Verschiebt man nun hingegen die Position einer der Ecken des Würfels so, dass sie nicht mehr in der Ebene eines der Vierecke liegt, die in ihr zusammentreffen, so zerbricht das ehemalige Viereck in zwei Dreiecke und eine neue Kante entsteht. Die so entstandene Figur hat nun immer noch 8 Ecken, aber 13 Kanten und 7 Seitenflächen. Auch die Anzahl der Kanten und Flächen, die in einer Ecke zusammentreffen, hat sich verändert. Das Polyeder hat einen anderen kombinatorischen Typ als der Würfel (siehe Abbildung 2c). Insgesamt gibt es 257 verschiedene kombinatorische Typen von Polyedern mit 8 Ecken.

Anzahl der Ecken des Polyeders	Anzahl der kombinatorischen Typen
4	1
5	2
6	7
7	34
8	257
9	2606
10	32300
11	440564

Tab. 1: Anzahl der kombinatorischen Typen von Polyedern mit n Ecken.

Die Graphen und damit die kombinatorischen Typen aller Polyeder sind bekannt, da es sich nach dem Satz von Steinitz um alle einfachen, planaren und 3-verbundenen Graphen handelt. Tabelle 1 enthält die Anzahl der kombinatorischen Typen von n-eckigen Polyedern. Für $n > 18$ ist die Anzahl der Polyeder bislang unbekannt.

3. Didaktisches Konzept und Anschlussfähigkeit

Eine Zielgruppe des Projekts sind Schülerinnen und Schüler. Da Polyeder nur am Rande Gegenstand des regulären Curriculums an weiterführenden Schulen in Deutschland sind, ist es wichtig, sie sinnvoll an den zentraleren Unterrichtsstoff anzuknüpfen, damit durch die Durchführung des Projektes „Adoptiere ein Polyeder“ die ohnehin schon knapp bemessene Unterrichtszeit für Mathematik, nicht weiter verkürzt wird. Diese Anschlussfähigkeit ist je nach Klassenstufe an verschiedenen Stellen zu finden. Tabelle 2 gibt eine Übersicht über mögliche Anknüpfungspunkte und orientiert sich dabei am Curriculum im Land Berlin.

Die Aufforderung ein eigenes Modell zu bauen, fordert nicht nur mathematisches Handeln heraus, sondern auch künstlerisches. Da keine Kriterien oder Anleitungen vorgegeben werden, sind die Schülerinnen und Schüler frei in ihrer Wahl in welcher Form sie sich mit dem Objekt auseinandersetzen. Im Sinne des forschenden Lernens wird es so ermöglicht selbstständig Forscherfragen zu entwickeln und dabei Neues zu entdecken. Hierbei soll sich der Umstand, dass jede Schülerin und jeder Schüler ein eigenes und individuelles Polyeder untersucht, unterstützend auf die Authentizität des Forschungsklimas auswirken.

Die genaue Untersuchung des Polyeders ist in der Terminologie des bundesweit verwendeten Kompetenzmodells primär im Kompetenzbereich *mathematisches Problemlösen* einzuordnen. Aber auch Kompetenzen wie *mathematisch Argumentieren* und *mathematische Darstellungen verwenden* werden dabei benötigt und vertieft. Bei den inhaltsbezogenen mathematischen Kompetenzen ist vor allem die Leitidee *Raum und Form* bzw. in der Sekundarstufe II *räumliches Strukturieren/Koordinatisieren* zu nennen. *Größen und Messen* (Sek II: *Approximation* bzw. *Messen*) und *Gleichungen und Funktionen* können je nach der von der Lehrkraft gewählten Betonung des Projekts ebenfalls eine Rolle spielen.

Klassenstufen	Anknüpfungspunkt
5+6	Konstruktion der Polygone (Seitenflächen) mit dem Geodreieck.
7+8	Polygone als Schnittflächen von linearen Funktionen interpretieren. Lineare Funktionen ablesen.
9+10	Dreidimensionale Körper. Oberflächenberechnung und Volumenberechnung.
Einführungsphase	Einführung und Anwendung des dreidimensionalen Koordinatensystems.
Qualifizierungsphase	Analytische Geometrie: Kanten als Schnittmenge zweier Ebenen im Raum. Anwendung von CAS System zum Berechnen des Volumens.

Tab. 2: Anknüpfungspunkte an das Curriculum im Fach Mathematik des Landes Berlin.

Literatur

Berliner Senatsverwaltung für Bildung, Jugend und Familie (Hrsg.) (2015) Rahmenlehrplan Mathematik, Jahrgangsstufen 1-10. http://bildungsserver.berlin-brandenburg.de/fileadmin/bbb/unterricht/rahmenlehrplaene/Rahmenlehrplanprojekt/amtliche_Fassung/Teil_C_Mathematik_2015_11_10_WEB.pdf. Abgerufen am 09.04.2018.

Cromwell, P. (1997). *Polyhedra*. Cambridge University Press.

Kultusministerkonferenz (Hrsg.) (2012) Bildungsstandards im Fach Mathematik für die Allgemeine Hochschulreife (Beschluss der Kultusministerkonferenz vom 18.10. 2012). https://www.kmk.org/fileadmin/veroeffentlichungen_beschluesse/2012/2012_10_18-Bildungsstandards-Mathe-Abi.pdf. Abgerufen am 26.03.2018.

Roth, J. und Weigand, H. (2011). *Forschendes Lernen — Eine Annäherung an wissenschaftliches Arbeiten*, Mathematik lehren, 169, S. 2-9. Friedrich Verlag, Seelze.

The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences, Sequence A000944. https:/oeis.org/A000944. Abgerufen am 28.02.2018.

Ziegler, G. (1995). *Lectures on Polytopes*, volume 152 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer, New York.