

Kerstin HEIN, Dortmund

## **Deduktives Schließen lernen in Klasse 8-12 – Entwicklungsforschung zur Spezifizierung und Förderung logischer Strukturen und sprachlicher Mittel**

### **Logische Strukturen des Deduktiven Schließens und deren sprachliche Mittel als Lerngegenstand**

*Mathematisches Argumentieren* ist für Schülerinnen und Schüler aller Schulstufen bis hin zur Universität eine große Herausforderung, auch wenn diesen Kompetenzen laut den Bildungsstandards eine hohe Bedeutung zugewiesen wird. Unter dieser sehr heterogen definierten Kompetenz ist insbesondere *Deduktives Schließen* für viele Lernende herausfordernd (Harel & Sowder, 1998). Ein Grund unter vielen dafür ist, dass die unsichtbaren logischen Strukturen in den informellen Sätzen erst identifiziert werden müssen, wie z.B. in den prädikativen Sätzen (wie „Scheitelwinkel sind gleich groß.“). Die Voraussetzungen und Schlussfolgerungen bei Implikationen, die nicht sprachlich durch „wenn“ und „dann“ markiert sind, müssen durch die Lernenden erst erkannt werden (Selden & Selden, 1995). Die Klärung der Sprachmittel beim Deduktiven Schließen ist auch deswegen zum Erlernen der logischen Strukturen notwendig (Durand-Guerrier, Boero, Douek, Epp, & Tanguay, 2011). Zur langfristigen Bewältigung der unsichtbaren, logischen Strukturen beim Deduktiven Schließen sind daher Explikationen dieser und deren sprachlichen Repräsentationen sinnvoll. Die genauen Sprachmittel der logischen Bezüge wurden jedoch erst in diesem Projekt empirisch rekonstruiert.

### **Methoden des Entwicklungsforschungsprojekts**

Das Projekt MuM-Beweisen verfolgt daher die beiden Ziele: 1. Die Rekonstruktion logisch-struktureller und sprachlicher Herausforderungen, 2. Entwicklung eines Lehr-Lern-Arrangements zur Explikation der logischen Strukturen und deren Verbalisierungen. Zur Erreichung dieser beiden Ziele wurde das Forschungsformat der Fachdidaktischen Entwicklungsforschung genutzt, welches gerade Erforschung und Entwicklung miteinander verbindet (Prediger et al. 2012; Prediger 2018). In diesem Forschungsrahmen wurden in 5 Zyklen mit insgesamt 48 Lernenden in Laborsettings und Lernende einer Klasse im Klassensetting in den Schulstufen 8-12 Designexperimente durchgeführt.

## **Design des Lehr-Lern-Arrangements „Mathematisch Argumentieren“**

Zum Explizieren der logischen Strukturen und deren Verbalisierungen wurden theoretisch und empirisch aus dem erstem Designzyklus die folgenden drei Designprinzipien abgeleitet: 1. Explikation der logischen Struktur durch die Lehrkraft, 2. Strukturelles Scaffolding für die Lernenden und 3. Sprache einfordern und unterstützen (Hein, 2018; Prediger 2018). Mit den Designprinzipien wurden die konkreten Designelemente des Lehr-Lern-Arrangements gestaltet: 1. lokale geordnete Sätze (hier: Winkelsätze), 2. materialisierte Argumentationsstrukturen zur Explikation logischer Strukturen (siehe genauer Hein & Prediger 2017) und 3. Sprache durch Schreibaufträge und Impulse eingefordert bzw. durch Sprachvorbilder, Lückentexte und Sprachspeicher unterstützt.

## **Empirische Einblicke in Explikationen und Verdichtungen in den Schriftprodukten von Linus und Katja**

Die Analyse der Explikationen der logischen Elemente (Voraussetzungen in der Aufgabe, Wenn-Dann-Sätze und Schlussfolgerungen) in den Äußerungen und Schriftprodukte der Lernenden geschieht mit dem Modell nach Toulmin (1958), das empirisch für das Lehr-Lern-Arrangement ausgeschärft wurde (siehe Prediger & Hein, 2017). Die syntaktischen Strukturen und lexikalischen Mittel werden auf Grundlage der funktionalen Grammatik identifiziert. Dies wird hier an zwei Fallbeispielen aufgezeigt, an jeweils einem verschriftlichten Argumentationsschritt der beiden Lernenden Linus und Katja.

### *Vom Argument zur Schlussfolgerung – eine verdichtete Verschriftlichung*

Linus (12. Klasse) schrieb zur Anwendung des Stufenwinkelsatzes:

„Der Winkel  $\alpha$  und  $\beta$  sind gemäß des Stufenwinkelargument gleich groß.“

Durch kausale Präpositionen wie hier „gemäß“ oder auch „laut“ in anderen Schriftprodukten werden die Schlussfolgerungen mit mathematischen Sätzen aus der Argumentationsbasis begründet, die nur mit deren Bezeichnung (hier: „Stufenwinkelargument“) genannt werden. Dabei werden notwendige Voraussetzungen (hier: Parallelität der Geraden) und die konditionale Wenn-Dann-Struktur der mathematischen Sätze noch nicht expliziert.

### *Komplexe Explikation der logischen Elemente und ihrer logischen Bezüge*

Katja (10. Klasse) schrieb zur Anwendung des Nebenwinkelsatzes:

Da der Winkel  $\beta$  mit zwei anderen Winkeln, nennen wir sie  $\alpha'$  und  $\gamma'$ , an der Geraden  $k$  liegt, können wir das Nebenwinkelargument anwenden, was besagt, dass wenn Winkel an zwei geschnittenen Geraden liegen, zusammen  $180^\circ$  ergeben. Da wir das alles gegeben haben, können wir sagen, dass  $\alpha'$ ,  $\beta$  und  $\gamma'$  zusammen  $180^\circ$  ergeben (müssen).

Abbildung 1: Versprachlichung der Anwendung des Nebenwinkelsatzes

Die mögliche Anwendung des Satzes wird hier kausal durch „Da ..., können wir anwenden ...“ durch die Voraussetzung begründet. In einer Metasprache wird durch „was besagt, dass ...“ die Einleitung des Wenn-Dann-Satzes formuliert, der wiederum durch „wenn“ mit seiner konditionalen Struktur markiert wird. Andere Lernende schlussfolgern oder verbinden ihre Argumentationsschritte mit „daher“ oder „daraus folgt“, einige drücken jedoch nicht die logischen Bezüge aus, indem sie ihre Argumentationsschritte beispielsweise wie beim rechnerischen Vorgehen mit „dann“ verbinden. Somit nutzen die Lernenden eine Bandbreite an syntaktischen Strukturen (kausale (Begründungen), konditionale (Bedingungen), konsekutive (Schlussfolgerungen), aber auch temporale (Zeit)) und lexikalischer Mittel, um die Elemente der logischen Strukturen zu explizieren und deren logischen Bezüge zu versprachlichen. Einige Lernende nutzen auch eine Metasprache, um auf die einzelnen Elemente der logischen Strukturen und deren Repräsentationen in den materialisierten Argumentationsstrukturen zu verweisen (genauer siehe Prediger & Hein 2017).

## Diskussion

Die materialisierten Argumentationsstrukturen fordern mehr als die unstrukturierte Nachfrage „Warum?“ die Explikation der unterschiedlichen Elemente der logischen Strukturen ein, so dass die Lernenden nach und nach auch die Voraussetzungen der Wenn-Dann-Sätze explizieren. Jedoch geschieht die Versprachlichung der logischen Bezüge beim Ausfüllen der materialisierten Argumentationsstrukturen und bei deren Verschriftlichung nicht automatisch, sondern muss gezielt unterstützt werden. Bei der Rekonstruktion notwendiger Sprachmittel zeigt sich Folgendes: je mehr die logischen Elemente expliziert werden, desto komplexer sind die syntaktischen Strukturen und variantenreicher die lexikalischen Mittel. Einige Phrasen wie „Laut dem ...-Argument“ scheinen eher verdichtete Explikationen, andere eher die Explikation von mehr Elementen der logischen Strukturen zu unterstützen, wie das hier zum Erlernen des Deduktiven Schließens angestrebt

wurde. Dies zeigt zum einen die Komplexität der expliziten, sprachlichen Form des Deduktiven Schließens. Zum anderen legen die Ergebnisse nahe, zum Erlernen des Deduktiven Schließens die Explikation der Elemente der logischen Strukturen explizit einzufordern und diese Explikation durch entsprechende Sprachmittel zu unterstützen.

## Literatur

- Durand-Guerrier, V., Boero, P., Douek, N., Epp, S. S., & Tanguay, D. (2011). Examining the Role of Logic in Teaching Proof. In G. Hanna, & M. de Villiers (Hrsg.), *Proof and Proving in Mathematics Education* (Bd. 15, S. 369–389). Dordrecht: Springer Netherlands.
- Harel, G., & Sowder, L. (1998). Students' Proof Schemes: Results from Exploratory Studies. *CBMS Issues Mathematics Education*, 7, 234–283.
- Hein, K. (2018, i.Dr.). Gegenstandsorientierte Fachdidaktische Entwicklungsforschung am Beispiel des mathematikdidaktischen Projekts MuM-Beweisen. In K. Fereidooni, K. Hein, & K. Kraus (Hrsg.), *Theorie und Praxis im Spannungsverhältnis. Beiträge für die Unterrichtsentwicklung* (Bd. 2). Münster: Waxmann.
- Hein, K., & Prediger, S. (2017). Fostering and investigating students' pathways to formal reasoning: A design research project on structural scaffolding for 9th graders. In T. Dooley & G. Gueudet (Hrsg.), *Proceedings of the Tenth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (S. 163–170). Dublin: DCU/ERME.
- Prediger, S. (2018, i.Dr., in diesem Band). Design-Research als fachdidaktisches Forschungsformat: Am Beispiel Auffalten und Verdichten mathematischer Strukturen. In *Beiträge zum Mathematikunterricht*. Münster: WTM.
- Prediger, S., & Hein, K. (2017). Learning to meet language demands in multi-step mathematical argumentations: Design research on a subject-specific genre. *European Journal of Applied Linguistics*, 5(2), 309–335.
- Prediger, S., Link, M., Hinz, R., Hußmann, S., Thiele, J., & Ralle, B. (2012). Lehr-Lernprozesse initiieren und erforschen – Fachdidaktische Entwicklungsforschung im Dortmunder Modell. *Der mathematische und naturwissenschaftliche Unterricht*, 65(8), 452–457.
- Selden, J., & Selden, A. (1995). Unpacking the logic of mathematical statements. *Educational Studies in Mathematics*, 29(2), 123–151.
- Toulmin, S. E. (1958). *The Uses of Arguments*. Cambridge: Cambridge University Press.