

## **GrundschulKinder bauen und sortieren Dreieckskörper**

### **1. Einleitung**

Dreieckskörper sind Polyeder, welche nur von zueinander kongruenten gleichseitigen Dreiecken begrenzt werden (Heinrich 2000, S. 263). Es existieren konvexe und nicht konvexe Dreieckskörper, die uns in zahlreichen Formen begegnen. Repräsentanten dieser Körperklasse finden wir im Alltag und in der Umwelt z. B. in Form von Spielsachen, als Schmuckelemente an Halsketten oder als originelle Vasen.

Dreieckskörper gehören ferner zum traditionellen Gut in der Polyedergeometrie vor allem im Kontext regulärer und halbregulärer Figuren. Der Umgang mit ihnen ermöglicht es in besonderer Weise, geistige Tätigkeiten, die für den Bereich Mathematik bestimmend sind, anzuregen. Dies alles spricht für ein Aufgreifen des Themas im Unterricht.

Im Alltag des Mathematikunterrichtes in der Grundschule sind Dreieckskörper jedoch kaum anzutreffen, was vermutlich der Ausrichtung des Unterrichts nach einschlägigen Publikationen, Bildungsdokumenten, Lehrbüchern und Aufgabensammlungen geschuldet ist. Es findet sich hier eine Dominanz von Würfel, Quader, Kugel, (quadratische) Pyramide, Dreiecks- oder Sechseckprisma. Geht man davon aus, dass jüngere Kinder leichter als ältere Personen für neue, auch ungewohnte Situationen und Aufgaben zu motivieren sind (vgl. z. B. Fritzlar 2005) spricht nichts gegen einen möglichst frühen Beginn der Erschließung dieses neuen stofflichen Inhaltes. Wir sehen darin eine Möglichkeit der Verwirklichung des Prinzips des vorwegnehmenden Lernens.

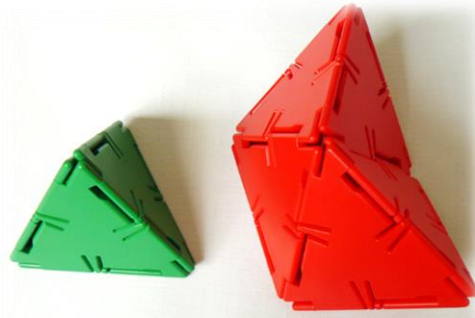
*Doch wie nehmen GrundschulKinder ein solches Lernangebot auf? Welche Aktivitäten an bzw. mit Dreieckskörper können sie in welcher Qualität ausführen?*

Vor dem Hintergrund dieser und ähnlicher Fragen ging es uns im Rahmen einer empirischen Erkundungsstudie mit elf ViertklässlerInnen um die Anreicherung unseres Wissens, wie GrundschulKinder die Aktivitäten *Bauen nach vorgegebenem Thema* und *kategoriensuchendes Sortieren* (vgl. Franke & Reinhold 2016) in Einzelarbeit selbstständig ausführen. Jedes Kind hatte für jede dieser beiden Tätigkeiten ca. zwölf Minuten Bearbeitungszeit.

Darüber hinaus erwarteten wir erste Anregungen für die mögliche (unterrichtliche) Verwertbarkeit der erhaltenen Befunde.

## 2. Bauen von Dreieckskörpern

Nach Vorgabe eines Tetraeders und eines sogenannten „Einbuchtungskörpers“ sollten die ViertklässlerInnen weitere Dreieckskörper mit dem Material von Polydron herstellen. Dabei war darauf zu achten, dass wirklich nur Dreieckskörper und keine anderen Polyeder entstanden.



Die Anzahl der gefundenen Körper variierte von Kind zu Kind. Insgesamt stellten die Kinder innerhalb von etwa zwölf Minuten jeweils zwei bis fünf Körpermodelle her. Bezogen auf Dreieckskörper fanden sie jeweils ein bis vier. Die meisten ViertklässlerInnen bauten *drei* der gesuchten Polyeder. Auffällig war der hohe Anteil an hergestellten nicht konvexen Dreieckskörpern und die Dominanz im Auftreten der Dreiecksbipyramide.

Bei der Sichtung der gefilmten Interviews konnten einige Schwierigkeiten beim Herstellungsprozess erkannt werden. Dabei ist zwischen Problemen technischer, motorischer Art einerseits und Problemen in der kognitiven Arbeit andererseits zu unterscheiden. Es stellte sich schnell heraus, dass die Kinder sich zunächst an das Material sowie an die Vorstellung von Dreieckskörpern gewöhnen mussten und somit manche SchülerInnen diesbezüglich anfängliche Probleme hatten. Sie haben Modelle hergestellt, die andere Flächenarten enthielten, indem sie zwischen den Dreiecksflächen keine Kante entstehen lassen haben. Einige gingen von einer Sechseckfläche aus und verformten diese nicht, sodass ein Sechseck als Grundlage für ein Körpermodell diente. So entstanden mitunter Modelle, die keine Dreieckskörper sind.



Wenige Kinder hatten Schwierigkeiten zu erkennen, wie man die einzelnen Flächen aneinanderfügt. Bei der Abbildung ist die Entstehung eines Modells unmöglich. Aufgrund motorischer Probleme brachen wenigen Kindern die Körperrümpfe und Teilkonfigurationen wieder auseinander.

Kognitiv gesehen wurden in manchen Fällen scheinbar offensichtliche Schließungen der Modelle nicht erkannt oder eigene Vorstellungen konnten nicht wie gewünscht umgesetzt werden.

Didaktische Anmerkungen zum Bauen nach vorgegebenem Thema:

Die Aktivität „Bauen“ ist von allen Kindern und in der vorgegebenen Zeit umsetzbar gewesen.

Die vorliegenden Leistungsunterschiede der Kinder zeigen der Lehrkraft Differenzierungsmöglichkeiten aber auch Differenzierungsnotwendigkeit auf. Ebenso muss die Lehrkraft darauf sensibilisiert sein, dass einige Kinder länger benötigen oder neben den kognitiven Fähigkeiten auch motorische Defizite eine Rolle spielen können.

Ansonsten kann der Schwierigkeitsgrad der Aufgabe leicht durch Variation des Arbeitsauftrages erhöht oder vereinfacht werden.

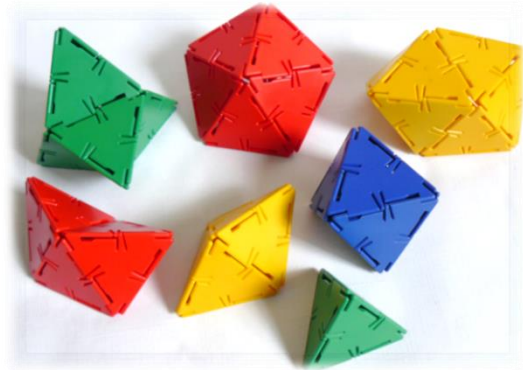
Der beim Bauen bereits aufkommende Aspekt „konvex – nicht konvex“ kann propädeutisch aufgegriffen werden.

Wie in vielen Bereichen der Interviews deutlich wurde, benötigen die Kinder unbedingt eine Phase, in der sie sich vorab mit dem Material auseinandersetzen und sich daran gewöhnen können.

An sich halten wir das Material für sehr geeignet bezüglich der Motivation im Mathematikunterricht und im Umgang beim Finden und Arbeiten mit ihnen unbekanntem Körpern.

### 3. Sortieren von Dreieckskörpern

Den elf Grundschulkindern wurden die abgebildeten sieben Dreieckskörper vorgelegt. Sie sollten selbstständig Sortierkriterien finden und darauf bezogen entsprechende Körpergruppen bilden. Folgende Kriterien wurden in folgender Häufigkeit von den Kindern gewählt:



Farbe (9x), Ähnlichkeit im Aussehen (9x), Größe (Gesamtwirkung, Wichtigkeit) der Körper (6x), Eckenanzahl (4x), Flächenanzahl (5x), Parkettierungsmöglichkeit des Raumes (2x). Unter Ähnlichkeit im Aussehen wird dabei von den Kindern Verschiedenes verstanden, so z. B. ob der Körper eher rund oder eher eckig beschaffen ist, die Art seines Aussehens bei der Draufsicht, ob er „Spitzen“ hat oder nicht. Je 1x genannt wurden die Schönheit des Körpers, die Leichtigkeit beim Bauen, die Kantenanzahl, die Pyramidenanzahl innerhalb des Körpers, die Höhe, die Farbmusterfolge der Seitenflächen, das Musterlogo, die „Flächenwinkelgröße“ und die Art der Entstehung aus anderen Körpern. Wie die Aufzählung nahelegt, finden sich Sortierkriterien, die stark subjektiv geprägt sind wie z.B. die Schönheit der Körper. Wegen derartiger Kriterien war es nicht möglich, die Korrektheit aller Sortierhandlungen zu bewerten. Bei den bewertbaren Sortierungen hat der überwiegende Anteil der Kinder völlig oder zumindest weitgehend korrekt gearbeitet. Am schwierigsten gestaltete sich für die Kinder das Sortieren nach selbst formulierten Ähnlichkeitskriterien.

Das Leistungsvermögen beim Sortieren war breit gefächert. Zwei Kindern gelang es selbstständig, innerhalb der zwölf Minuten Bearbeitungszeit sieben Kriterien zu finden und danach zu sortieren. Die Mehrzahl der Schülerinnen und Schüler fanden drei bis fünf Kriterien und nur drei Kinder mussten sich mit zwei gefundenen Sortierkriterien zufriedengeben.

Interessant fanden wir, dass kein(e) Viertklässler(in) von sich aus die vorliegenden Dreieckskörper in kindgemäßer Sprache in konvex und nicht konvex unterschieden hat. Nachdem die Versuchsleiterin Marie Landsmann anschließend diese Sortierung vorgenommen hat, konnten vier der elf Kinder ohne weitere Hilfe das gesuchte Kriterium herausfinden bzw. begründen, wie die folgende Schüleräußerung illustrieren soll: *„weil hier Ecken nach innen gemacht so... also hier sind die Ecken ja überall nach außen“*

Didaktische Anmerkungen zum kategoriensuchenden Sortieren, die über unsere Anmerkungen zum Bauen hinausgehen:

Alle Kinder waren erfolgreich. Es gelang jedem Kind wenigstens eine Lösung, was für die Eignung des Arbeitsauftrages spricht.

Wichtig erscheint uns, dass die Lehrkraft für „subjektiv angehauchte“ Befunde sensibilisiert wird bzw. ist.

Kinder nennen geeignete Sortiermerkmale, erfassen diese häufig aber nicht richtig und nehmen dann fehlerhafte Zuordnungen vor. Vor diesem Hintergrund ist Lehrerhilfe unverzichtbar.

Die angestrebte kindgemäße Erfassung von konvex und nicht konvex erfordert vermutlich auch mehr Unterstützung durch Lehrpersonen.

Unsere Studie hat zudem Ergebnisse von Franke (1999) bekräftigt, dass Kinder räumliche Sachverhalte durch Begrifflichkeiten aus der ebenen Geometrie beschreiben. Im Unterricht sollte daher besonderes Augenmerk auf eine entsprechende Unterscheidung gelegt werden.

## Literatur

Franke, M. (1999). Was wissen Grundschul Kinder über geometrische Körper? In: Henning, H. (Hrsg.), *Mathematik lernen durch Handeln und Erfahrung*, S. 151-163. Oldenburg: Bültmann & Gerriets

Franke, M. & Reinhold, S. (2016). *Didaktik der Geometrie in der Grundschule*. 3. Aufl. Berlin, Heidelberg: Springer Spektrum.

Fritzlar, T. (2005). Die „Matheasse“ in Jena – Erfahrungen zur Förderung mathematisch interessierter Grundschüler. In: *Mathematikinformation*, Heft 43, S. 16-38.

Heinrich, F. (2000). Nichtreguläre konvexe Dreieckskörper. In: *Die Wurzel – Zeitschrift für Mathematik*, Jahrgang 34, Heft 12/00, S. 262-268.

Landsmann, M. (2017). *Grundschul Kinder erkunden Dreieckskörper*. Masterarbeit. Technische Universität Braunschweig, Institut für Didaktik der Mathematik und Elementarmathematik.