Wilfried HERGET, Halle a.d.S.

Was mir wirklich wichtig ist – Mathe auf den Punkt bringen

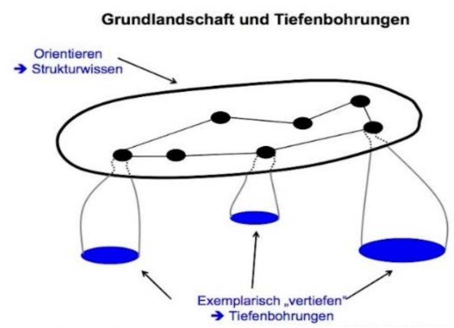
Wie kann ich im Unterricht inhaltliche Schwerpunkte setzen? Was ausführlicher machen und wo etwas kürzen?

Weniger ist mehr. Manchmal. Das bedeutet aber nicht, Anspruchsvolles einfach wegzulassen oder in kleinste Häppchen zu zerlegen. Sondern zu prüfen, ob das Anspruchsvolle wirklich wesentlich ist – und dann sich die notwendige Zeit dafür zu nehmen, zu geben. Und einen Weg zu finden, den anspruchsvollen wesentlichen Happen ausreichend verdaulich zu gestalten (Lambert/Herget 2017).

Dieses grundlegende Prinzip möchte ich hier insbesondere an der Auswahl und Formulierung von Aufgaben skizzieren – von der Sek I bis zum Abitur.

Reduktion – eine fundamentale Idee (auch) der Mathematikdidaktik

An das Problem „Viel Stoff – wenig Zeit" geht Martin Lehner (2006, S. 29–49) heran, indem er dem *exemplarischen Lernen* Martin Wagenscheins folgt, den *Mut zur Lücke* zulässt im Sinne von „Mut zur Gründlichkeit, Mut zum Ursprünglichen" (Wagenschein 1988, S. 31 ff., S. 37, S. 52). Lehners Grafik illustriert Wagenscheins Metapher der *Grundlandschaft* und der *Tiefenbohrungen* – „gründlich statt vollständig".

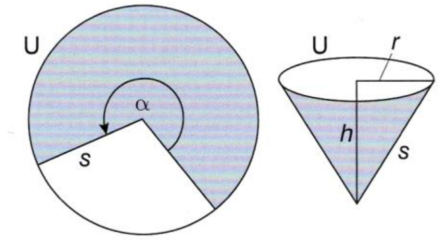


Anselm Lambert hat darauf hingewiesen, dass mit dem didaktischen Prinzip *Reduktion* neben *Transformation* ein zweiter Kandidat für eine fundamentale Idee der Mathematikdidaktik vorliegt; Reduktion genügt den Kriterien für fundamentale Ideen (Lambert/Herget 2017, S. 6): *Horizontalität* (Auftreten in unterschiedlichen Bereichen); *Vertikalität* (Auftreten in unterschiedlichen Schulstufen; Diskurs in unterschiedlichen Tiefen – unterrichtspraktisch bis wissenschaftlich-theoretisch); *Archetypizität* (Auftreten im Alltag und Relevanz für den Alltag); *Historizität* (Verankerung in der Geschichte der mathematikdidaktischen Diskussion).

Sehr lesenswert ist unverändert Heinrich Winters Beitrag über *zu* „Reduktionistische Ansätze …" (Winter 1985). Er beschreibt darin, wie vielschichtig die Herausforderungen an die Mathematikdidaktik sind – doch wie viel davon ist bis heute Herausforderung geblieben?

Weniger …

Viele Jahre lang hatten meine Erfahrungen beim Stellen und Korrigieren von Aufgaben dazu geführt, dass die Formulierungen immer ausgefeilter und umfangreicher wurden; sorgfältig ergänzt mit hilfreichen Hinweisen, Benennungen und Zeichnungen, dabei möglichst dem Muster „vom Konkreten zum Allgemeinen“ folgend. Ein Beispiel (Herget 2017a):

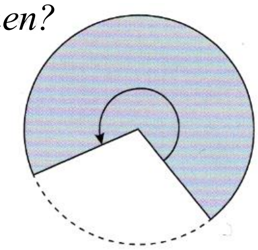


Rollt man einen Kreissektor zusammen, so entsteht ein Kegelmantel. Der Umfang U des zugehörigen Kegel-Grundkreises ist dann gleich der Bogenlänge b des Kreissektors.

a) Wie groß muss der Mittelpunktswinkel α sein, damit ein Kegel mit Seitenhöhe s = 8 cm und Grundkreis-Radius r = 3 cm entsteht?

b) Bei welchem α entsteht ein Kegel mit maximalem Volumen?

Als Kontrast, auf den wesentlichen Kern abgespeckt:



Rollt man einen Kreissektor zusammen, so entsteht ein Kegel. Bei welchem Mittelpunktswinkel des Sektors entsteht ein Kegel mit maximalem Volumen?

Natürlich wird die Aufgabe durch dieses *Weglassen* (und *Weg lassen*) anspruchsvoller. Jetzt müssen die Schülerinnen und Schüler selbst die Situation mathematisieren: den Zusammenhang zwischen Grundkreis-Umfang und Kreissektor-Bogenlänge finden, die entsprechenden Benennungen einführen und schließlich den Weg hin zur Lösung finden. Aber sind dies nicht gerade Fähigkeiten, die eben nicht dem Computer übertragen werden können?

Übrigens lässt sich diese Aufgabe bereits in der Sek I lösen (Herget/Strick 2012, S. 53) – wenn man probierende *grafische* oder *tabellarische* Lösungsverfahren zulässt. Das Schöne: Es gibt kaum eine gängige Extremwertaufgabe, mit der das nicht funktioniert, und es ist ein echter Beitrag zur Anwendungsorientierung: Wie kann ich mir schon mit *wenig* Mathematik helfen?!

Einfacher …

Seit PISA uns sehr vertraut: Aufgaben, die wortreich eine vermeintlich reale Situation beschreiben, mit einer wohlkonstruierten Sequenz von vermeintlich realen Fragen … Auch die „Kurvendiskussion“ wird kunstvoll-künstlich verkleidet – so etwa das *Gartenniederschlagversickerungsmuldenbrett …*

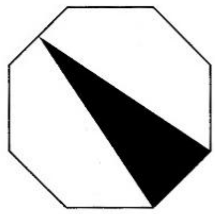
„Für die Versickerung von Niederschlag soll im Garten eine Mulde angelegt werden ...“ Der Querschnitt wird beschrieben mittels $f(x) = 1/64\, x^3 + 3/32\, x^2$, und es ist zu prüfen, ob die Mulde nicht zu steil ist. Und natürlich ist die

Querschnittsfläche zu berechnen. Ferner gibt es das Brett mit $k(x) = -9/64\,x$ (ja, genau dieses Brett …), und es ist zu zeigen, dass es die Mulde nur im Punkt A(–3 | 27/64) berührt (ja, eben genau dort …). Und zu guter Letzt ist da noch die Brücke mit $g(x) = -1/32\,x^2 - 1$ … Der Text füllt eine ganze Seite, auf der zweiten Seite finden sich die Skizzen mit allen Bezeichnungen.

Benötigt man die Kurvendiskussion, um eine Niederschlagversickerungsmulde im Garten zu planen und dann ein Brett an die Böschung anzulehnen? Ist dies wirklich angebracht, in einer solch besonderen Prüfungssituation? Sollte es nicht vor allem um das *Verstehen* der Schul-Analysis gehen?

Mir gefallen Aufgaben mit wenig Text – auch in Prüfungssituationen.

Welcher Bruchteil dieser Figur ist schwarz gefärbt?



„Weglassen & Weg lassen“ – Es ist ausgesprochen spannend, wie viele verschiedene Wege es hier gibt (Vernay 2007). Übrigens: Eine wahre Fundgrube für textkarge Geometrie-Aufgaben ist (Eigenmann 1981).

W E **R** T Z **Regelmäßig …**

Tägliche Übungen sind eine Folge von etwa 5–10 kleinen Aufgaben, die in der Regel zum Stundenbeginn bearbeitet werden (regelmäßig – aber nicht unbedingt „täglich“), mit Feedback, aber ohne Notendruck. Sie spiegeln das notwendige Mindestniveau: Ohne diese Kenntnisse und Fertigkeiten kann der weitere Unterricht nicht wirklich verfolgt werden. Gerade in heterogenen Klassen erweist sich das regelmäßige Sichern von Fertigkeiten und Grundwissen als wesentlich für den Lernerfolg (Hoffkamp 2018).

Auch „umgekehrte Aufgaben“ lohnen sich (Herget 2017b): Aus „Löse …“ wird „Finde möglichst viele Gleichungen mit der Lösung …“. Eine weitere Variante: Aufgaben durch die Schülerinnen und Schüler selbst stellen lassen.

Finde möglichst komplizierte Terme, deren Wert 0 (oder 1 oder 2018) ist.

Stelle zu jedem Kongruenzsatz eine Konstruktionsaufgabe.

Geradezu phänomenal finde ich die Idee von Hans Karl Eder (vgl. Herget/Strick 2012, S. 47 f.): Aus „Zeichne den Graphen zu …“ wird

Zeichne irgendeine Gerade auf ein leeres, unliniertes Blatt Papier.

Nun kommt es: Die Gerade soll die Gleichung f(x) = 2x + 3 besitzen.
Zeichne ein passendes Koordinatensystem mit gleich skalierten Achsen.

Faszinierend: Selbst bei jahr(zehnt)elanger Erfahrung im Zeichnen von Graphen linearer Funktionen ist diese Aufgabe erst einmal ein Schock – und es ist spannend, wie viele unterschiedliche Lösungswege es dazu geben kann.

W E R **T** Z   Tun …

Hier verweise ich auf z. B. (Herget 2014; Charon et al. 2018; Herget/Strick 2012, S. 30–32; S. 63) – das spart mir Platz ;-).

W E R T **Z**   Zeit nehmen, Zeit geben, Zeit lassen …

Kennen Sie das, am Ende einer Klausur, Klassenarbeit, Schularbeit? Wenn fast alle, die Köpfe tief gebeugt über den Heften, gerötet vor Anstrengung, schnell noch etwas zu Papier bringen wollen? Was tun?! – Als Lehrer habe ich gelernt, weniger Aufgaben zu stellen (Herget 2017b). Von jedem Aufgabentyp so wenige, wie ich es verantworten konnte. Und ich freute mich, wenn am Ende der Arbeit fast alle (!) schon abgegeben hatten. Denn es geht mir nicht um „Schnell, schnell!“ – sondern ums Verstehen, Begreifen, Reflektieren, ums sorgfältige Nachdenken, Bearbeiten. So viel Zeit darf sein.

Literatur – zum Weiterlesen …

Charon, K. et al. (2018): Ebene Geometrie mit dem Notizklotz. *Mathematik 5–10,* H. 44.

Eigenmann, P. (1981): Geometrische Denkaufgaben. Stuttgart, Klett.

Herget, W. (2014): Papierfalten im Mathematikunterricht – gefällt mir! In J. Roth & J. Ames (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht* (S. 527–530). Münster, WTM.

Herget, W. (2017a): Aufgaben formulieren (lassen). Weglassen und Weg lassen – das ist (k)eine Kunst. *mathematik lehren*, Heft 200, S. 10–13.

Herget, W. (2017b): Die etwas andere Aufgabe: Prozente, Punkte und die Zeit … weu sunst geht ollas Schene schnö vuabei. *mathematik lehren*, Heft 200, S. 48–49.

Herget, W. & Lambert, A. (Hrsg.) (2017): Mathe auf den Punkt bringen: Reduktion. *mathematik lehren, Heft 200*.

Herget, W. & Strick, H. K. (2012): *Die etwas andere Aufgabe 2 – Mathe mit Pfiff*. Velber, Friedrich Verlag.

Hoffkamp, A. (2018): Den Schülerinnen und Schülern zugewandt – Feedback im Unterrichtsalltag. *MUED-Rundbrief Nr. 206*, S. 21–29. → www.mued.de

Lambert, A. & Herget, W. (2017): Suche nach dem springenden Punkt! *mathematik lehren*, Heft 200, S. 4–9.

Lehner, M. (2006/2013[4]): *Viel Stoff – wenig Zeit. Wege aus der Vollständigkeitsfalle*. Bern, Haupt.

Vernay, R. (2007): Bilder mit Mathe. Stumme Impulse zum Modellieren und Argumentieren. *mathematik lehren*, Heft 145, S. 10 – 13.

Wagenschein, M. (1988): *Verstehen lehren. Genetisch – Sokratisch – Exemplarisch*. Weinheim/Basel, Beltz.

Winter, H. (1985): Reduktionistische Ansätze in der Mathematikdidaktik. *Der Mathematikunterricht* 31/5, S. 75–88.

Winter, H. (1995): Mathematikunterricht und Allgemeinbildung. – *Mitteilungen der GDM*, Nr. 61, S. 37–46.

Winter, H. W. (2016): *Entdeckendes Lernen im Mathematikunterricht. Einblicke in die Ideengeschichte und ihre Bedeutung für die Pädagogik*. Heidelberg, Springer.