

## **Kantenmodelle mal anders – eine Lernumgebung zur Förderung der geometrischen Begriffsentwicklung**

### **1. Die Ausgangslage**

Ein aktuelles Forschungsinteresse der Fachgruppe liegt in der Beschreibung zum Umgang mit spezifischen kontextuellen Bindungen mathematischen Wissens bei Schülerinnen und Schülern unter Nutzung der 3D-Druck-Technologie. Bis zum Sommer 2017 ergaben unsere Recherchen, dass zum Umgang von Schülerinnen und Schülern mit der 3D-Druck-Technologie im Kontext des Mathematikunterrichts insbesondere im deutschsprachigen Raum wenige Untersuchungen oder Publikationen existieren. Um eigene Erfahrungen bei der Arbeit von Kindern mit der 3D-Druck-Technologie sammeln zu können, konzipierten wir deshalb eine eigene Lernumgebung. Im Rahmen der MatheWerkstatt an der Universität Siegen konnte das Vorhaben schnell organisiert werden. Um sowohl Impulse für die Weiterarbeit im Bereich der Primarstufe als auch der Sekundarstufe I ableiten zu können, erfolgte eine bewusste Entscheidung für die Arbeit mit Schülern Ende der 4. Jahrgangsstufe. Inhaltlich wurde der Fokus auf die Geometrie gelegt. So konnten Voraussetzungen und Lerninhalte des Mathematikunterrichts der Primarstufe einbezogen werden, ebenso wurde bereits das Spektrum der fünften Klasse mitberücksichtigt.

An drei Vormittagen im Sommer 2017 wurde die Lernumgebung „Kantenmodelle mal anders“ mit Viertklässlern durchgeführt. Diese Kinder hatten bereits einige Monate zuvor zu geometrischen Körpern in der MatheWerkstatt gearbeitet, wobei sich der methodische Aufbau als auch die konkrete Zielsetzung deutlich von denen dieser Lernumgebung unterschieden.

### **2. Theoretische Rahmung**

Für die Rahmung des Pilotprojektes gilt es, die Möglichkeiten der neuen Technologie des 3D-Drucks unter der Perspektive anerkannter Theorien und Konzepte zu beleuchten sowie die theoretischen Ansätze zusammenzuführen.

Als Rahmung wurde eine Lernumgebung zu einem geometrischen Thema konzipiert, innerhalb derer zunächst die Begriffsentwicklung in den Blick genommen wird. Hier befassen wir uns im Speziellen mit der Theorie eines konstruktiven Begriffserwerbs, die beispielweise auf die Begriffsbildung durch Konstruktion nach Holland zurückgeht (vgl. Franke & Reinhold 2016). Begriffsbildung geht hier mit verschiedenen Tätigkeiten zur Herstel-

lung eines Begriffs und seiner Repräsentanten einher. Im Zentrum dieser Tätigkeiten steht die Auseinandersetzung mit konkreten Objekten und deren Eigenschaften, wobei die Ebenen der Anschauung und Vorstellungen eine bedeutende Rolle spielen. Sprachliche, bildliche und auch handlungsbezogene Komponenten werden berücksichtigt. In schulischen Kontexten wird meist von konkreten Objekten ausgegangen, deren Eigenschaften die Schüler im wahrsten Sinne des Wortes begreifen, „indem sie mit ihnen in vielfältigen Zusammenhängen handelnd aktiv werden“ (Franke & Reinhold 2016, S. 143). Ein Ziel der Begriffsentwicklung ist in der Ausbildung interner Repräsentation mathematischer Begriffe zu verstehen.

An dieser Stelle ist es möglich, die Theorie der Grundvorstellungen nach vom Hofe einfließen zu lassen. Grundvorstellungen werden im vorliegenden Artikel als mathematische Begriffe, Regeln und Verfahren sowie deren Deutungsmöglichkeiten in realen Situationen verstanden, wobei ein mathematischer Begriff durch die Vernetzung mehrerer in Beziehung zueinander stehender Grundvorstellungen charakterisiert wird. Als ein langfristiges Ziel des Mathematikunterrichts wird die Ausbildung eines Netzwerks beschrieben, „das sich durch Erweiterung von alten und Zugewinn von neuen Vorstellungen zu einem immer leistungsfähigerem System (...) entwickelt“ (vom Hofe et al. 2005, S. 276).

Dass Wissen und Vorstellungen stets an einen konkreten Kontext gebunden sind, beschreibt Heinrich Bauersfeld in seiner Theorie der Subjektiven Erfahrungsbereiche (SEB) (vgl. Bauersfeld 1985). Diese sind vereinfacht gesprochen als Wissensschubladen charakterisierbar, die anhand situationspezifischer Objekte, Handlungen und Emotionen beschrieben werden können. Die Gesamtheit der SEB ist nichthierarchisch angeordnet und jeder SEB konkurriert um Aktivierung. Einzelne SEB weisen trotz der (individuellen) Bereichsspezifität Gemeinsamkeiten auf, die beispielsweise durch die Erzeugung eines kognitiven Konflikts durch einen neuen vermittelnden SEB verbunden werden können. Diese Theorie ermöglicht eine sehr genaue Rekonstruktion kontextspezifischer Situationen. Ziel ist es diese über vermittelnde SEB zusammenzubringen. Das Konzept der Grundvorstellungen könnte dann als Beschreibungsrahmen für mögliche didaktische Handlungskategorien dienen, um konkrete Impulse zur Entwicklung von allgemeineren vermittelnden SEB im Unterricht setzen zu können.

### **3. Die Lernumgebung**

Leitendes Thema der Lernumgebung sind geometrische Körper, speziell der Würfel, den die Kinder seit der ersten Klasse zumeist im Sinne des Spiralprinzips nach Bruner kennengelernt haben. Im Mittelpunkt der hier dargestellten Arbeit steht die Erstellung von Kantenmodellen eines Würfels,

anhand derer Eigenschaften sowie Beziehungen zu weiteren geometrischen Körpern vertieft werden sollen. Für das Projekt wurde die Klasse in zwei Gruppen geteilt. Während eine Schülergruppe Kantenmodelle auf bewährte Weise mit Material herstellte, konstruierte die andere Schülergruppe mithilfe des CAD-Programms Tinkercad das geometrische Kantenmodell, das anschließend mit 3D-Druckern ‚materialisiert‘ und damit real erfahrbar wurde. Durch den Vergleich der Gruppen sollen Unterschiede und Besonderheiten mit Blick auf die Begriffsentwicklung und die Bereichsspezifität von Wissen identifiziert werden. Auch wenn noch weitere Aktivitäten zu der Lernumgebung gehören, wird im Weiteren ausschließlich auf diese Aspekte eingegangen.

Nach einer gemeinsamen Einführung und Aktivierung des Vorwissens wurden die Viertklässler in zwei Gruppen geteilt. Für die klassische Herstellung der Kantenmodelle standen Knete, Trinkhalme, Zahnstocher und Schaschlikspieße zur Verfügung. Auf Grundlage des Datenmaterials konnte häufig ein Vorwärtsarbeiten bei der Erstellung der Kantenmodelle beobachtet werden. Das bedeutet, Knetkugel als Ecken des Würfels und Halme o.Ä. als Kanten des Würfels wurden Schritt für Schritt ohne vorherige Planungsphase zusammengesteckt. Um mithilfe des 3D-Druckers die benötigten Teile für das Kantenmodell eines Würfels in korrekter Anzahl zu erstellen, ist es im Gegensatz bei der Arbeit mit der CAD-Software Tinkercad notwendig planend vorzugehen, so müssen z.B. die Eigenschaften des Würfels bekannt sein und in den Problemlöseprozess eingebracht werden. Zunächst erstellten die Viertklässler in der 3D-Druck-Gruppe eine passende Würfecke, die dann im CAD-Programm entsprechend vervielfacht wurde, damit der 3D-Drucker auch acht Würfecken erstellt. Anschließend wurde mit den Kanten ähnlich verfahren. Dabei galt es zu beachten und zu planen, dass die Kanten zu den entsprechenden Ecken passen müssen.

In der darauffolgenden Woche wechselten die Gruppen das Arbeitssetting, so dass alle Viertklässler Kantenmodelle sowohl nach klassischer Art, als auch mithilfe der 3D-Druck-Technologie, erstellen konnten. Die Ergebnisse und Erfahrungen wurden dann an einem dritten Vormittag gemeinsam zusammengetragen sowie reflektiert. Bezugnehmend auf das zuvor genannte Forschungsinteresse sowie die theoretische Rahmung ist interessant, inwiefern die Kinder in den verschiedenen Kontexten der beiden Arbeitsgruppen agierten und sie aufeinander beziehen konnten.

#### **4. Erste Beschreibung subjektiver Erfahrungsbereiche**

Drei nach der Arbeit mit der 3D-Druck-Technologie durchgeführte Interviews wurden bereits analysiert. Die in der Theorie der SEB beschriebene

Bereichsspezifität bestätigt sich anhand der Daten. Die in den Interviewsituationen deutlich werdenden Beschreibungen, Erklärungen und Zeichnungen scheinen als SEB trotz der gemeinsamen Vorerfahrungen zu Kantenmodellen tatsächlich zunächst unverbunden nebeneinander zu bestehen. Vier mögliche unterschiedliche SEB lassen sich identifizieren:

- In den SEB „Knetfiguren“ agieren die Viertklässler mit den Objekten Knete, Trinkhalmen und Spießen. Sie rollen und formen Knete, stecken die Knetfiguren mit festen Objekten zusammen.
- Auch blitzen immer wieder SEB „Geometrische Körper“ auf, die in den Interviews aktiviert zu werden scheinen. Hier führen die Kinder den Begriff Körper selbst an oder verwenden spezifische Körpernamen, die in Handlungen des Zeichnens oder Beschreibens auftreten.
- Die Spezifität der CAD-Software Tinkercad führt ebenfalls zur Konstituierung eigener SEB. Hier führen die Kinder die Operationen des Programms aus und verwenden bei verbalen Äußerungen deutlich die Sprache des Programms ( ‚skalieren‘, ‚bohren‘, ‚verkleinern‘, ‚gruppieren‘ etc.).
- SEB „3D-Druck“ umrahmen die letztlich mit dem 3D-Drucker erzeugten Objekte, mit denen dann vielfältige Handlungen wie beispielsweise zusammenstecken, schleifen, drehen, festhalten etc. möglich sind.

## 5. Zusammenschau und Ausblick

Der Mehrwert der 3D-Kantenmodelle lässt anhand verschiedener Aspekte belegen. Mit Blick auf die hier dargestellten ersten Ergebnisse gilt es, die beschriebenen SEB auszuschärfen und anhand weiterer Datenanalysen zu bestätigen. Ergänzend soll die zeichnerische sowie die sprachliche Ebene mit einbezogen werden, der wir besondere Bedeutung beimessen.

## Literatur

- Bauersfeld, H. (1985). Ergebnisse und Probleme von Mikroanalysen mathematischen Unterrichts. In: W. Dörfler & R. Fischer (Hrsg.): Empirische Untersuchungen zum Lehren und Lernen von Mathematik. Wien: Hölder-Pichler-Tempsky, S. 7-25.
- Franke, M. & Reinhold, R. (2016). *Didaktik der Geometrie*. Berlin, Heidelberg: Springer Spektrum
- vom Hofe, R., Kleine, M., Blum, W. & Pekrun, R. (2005). Zur Entwicklung mathematischer Grundbildung in der Sekundarstufe I – theoretische, empirische und diagnostische Aspekte. In: M. Hasselhorn, H. Marx & W. Schneider (Hrsg.). Diagnostik von Mathematikleistungen – Jahrbuch der pädagogisch-psychologischen Diagnostik 4. Göttingen: Hogrefe, S. 263-292.